

ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO EXTREMAL DE SUCESIONES PERIÓDICAS

Manuel González Scotto
Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro
Portugal
msscotto@mat.ua.pt
<http://www.mat.ua.pt/msscotto>

PROGRAMA

- Objetivo de la Estadística de Valores Extremos;
- Ejemplos de aplicación: economía y medio ambiente;
- Fundamentos de la Teoría de Valores Extremos;
- Comportamiento extremo de transformaciones de sucesiones periódicas.

OBJETIVO

El objetivo de la teoría de valores extremos es desarrollar técnicas y modelos para describir acontecimientos que ocurren con poca frecuencia.

- Procesos medio ambientales
 - Temperaturas máximas (o mínimas);
 - Inundaciones;
 - Niveles de Ozono;
 - *Wind gust speed.*
- Aplicaciones Financieras
 - Medidas de riesgo: VaR, *conditional expected shortfalls*;
 - Mercados Cambiales;
 - Seguros.

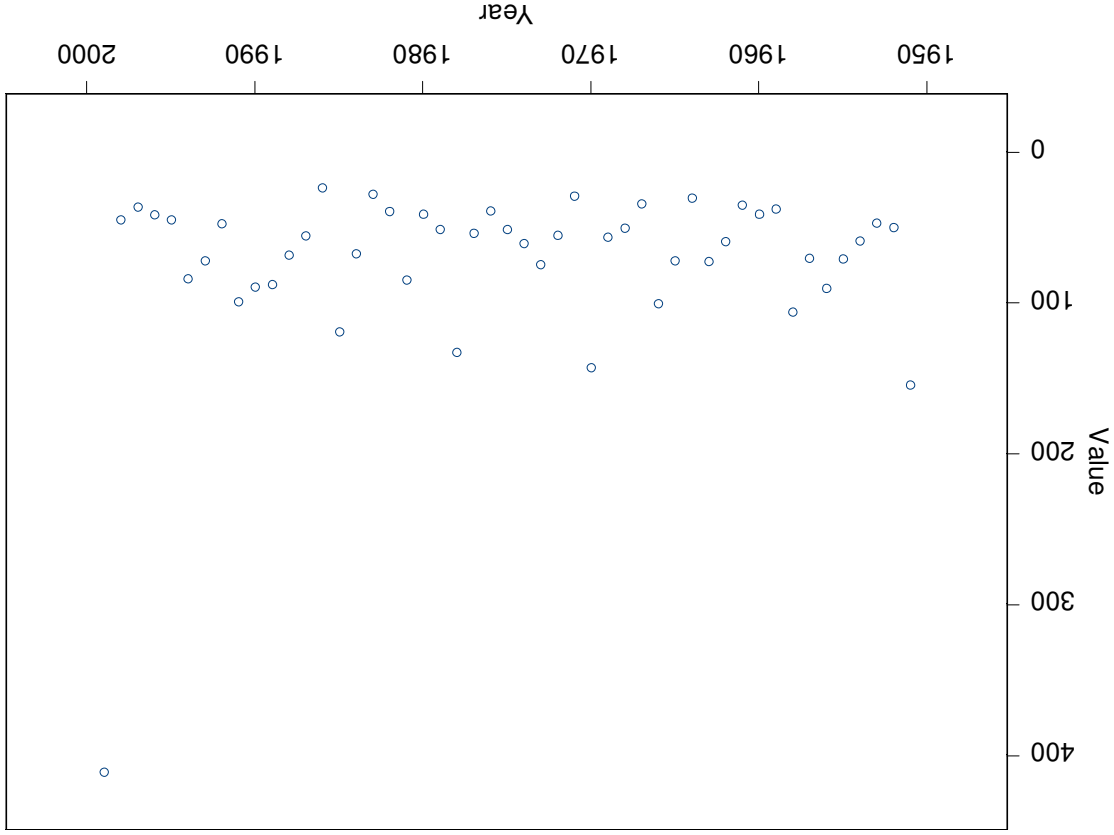
CONSTRUCCIÓN DE DIQUES EN HOLANDA

Determinar la altura de los diques de manera a garantizar que la probabilidad de una inundación, en un determinado año sea igual a p , siendo p un valor muy pequeño!



de Haan, L. (1990). Fighting the arch-enemy with mathematics. *Statistica Neerlandica* 44, 45-68.

INUNDACIONES



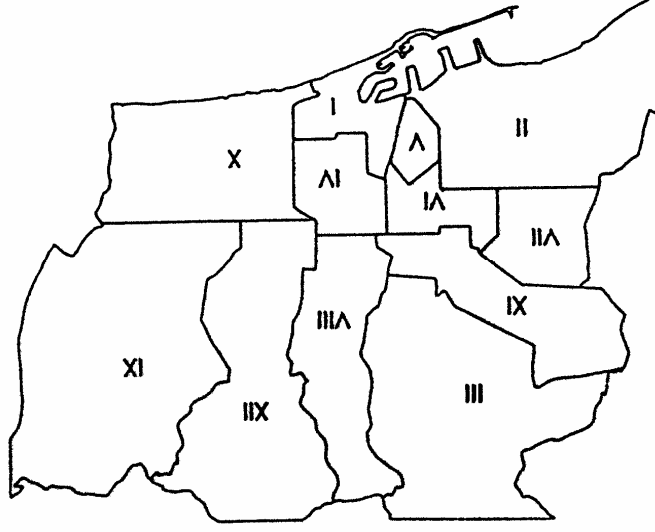


INUNDACIONES (continuación)

NIVELES DE OZONO

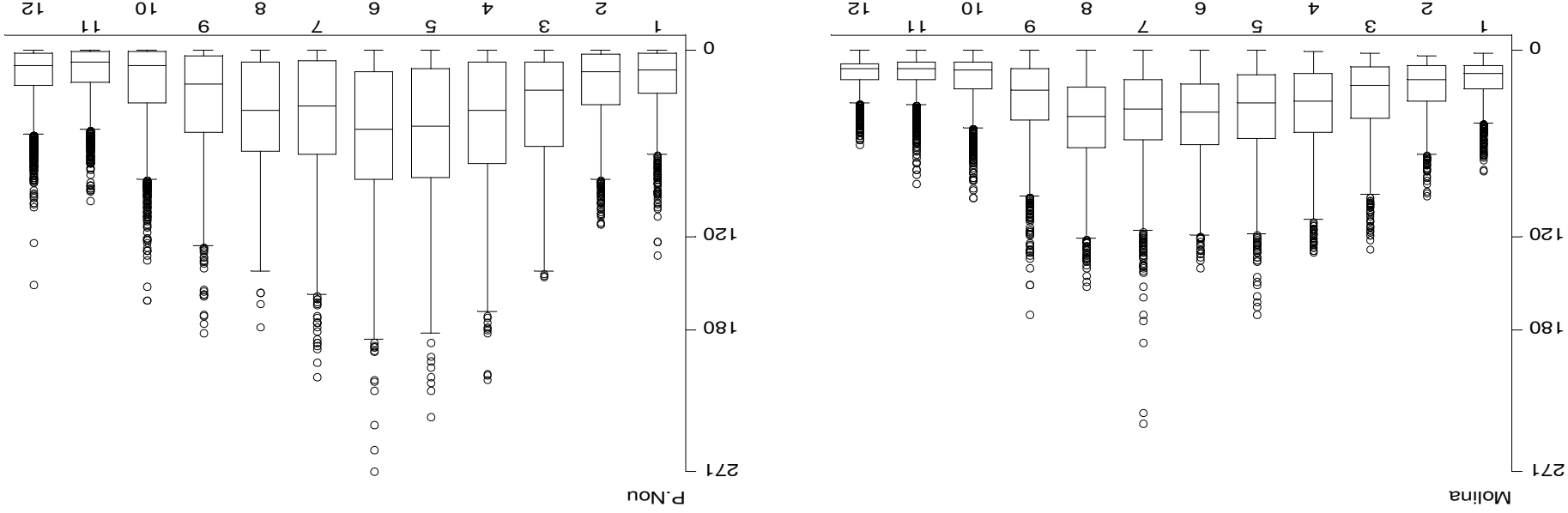
Observaciones horarias de O_3 : periodo 1991-1996.

- Estación de Plaza Molina;
- Estación de Pujades (Poble Nou).

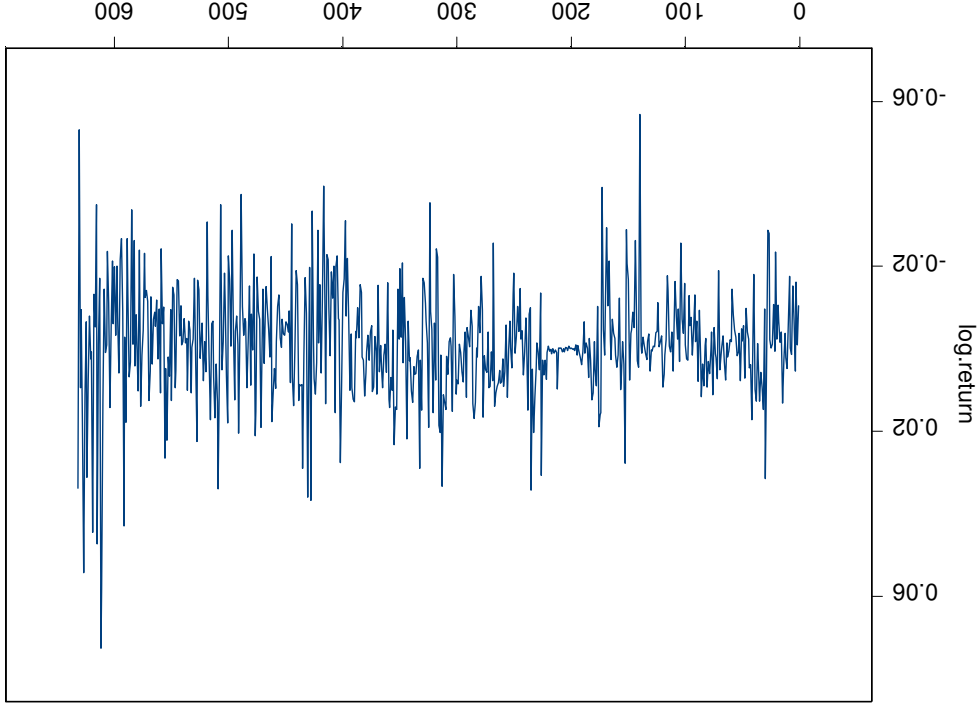


Tobías, A. and Scotto, M. G. (2005). Prediction of extreme ozone levels in Barcelona, Spain. *Environmental Monitoring & Assessment*. **100**, 23-32.

NIVELES DE OZONO (continuación)

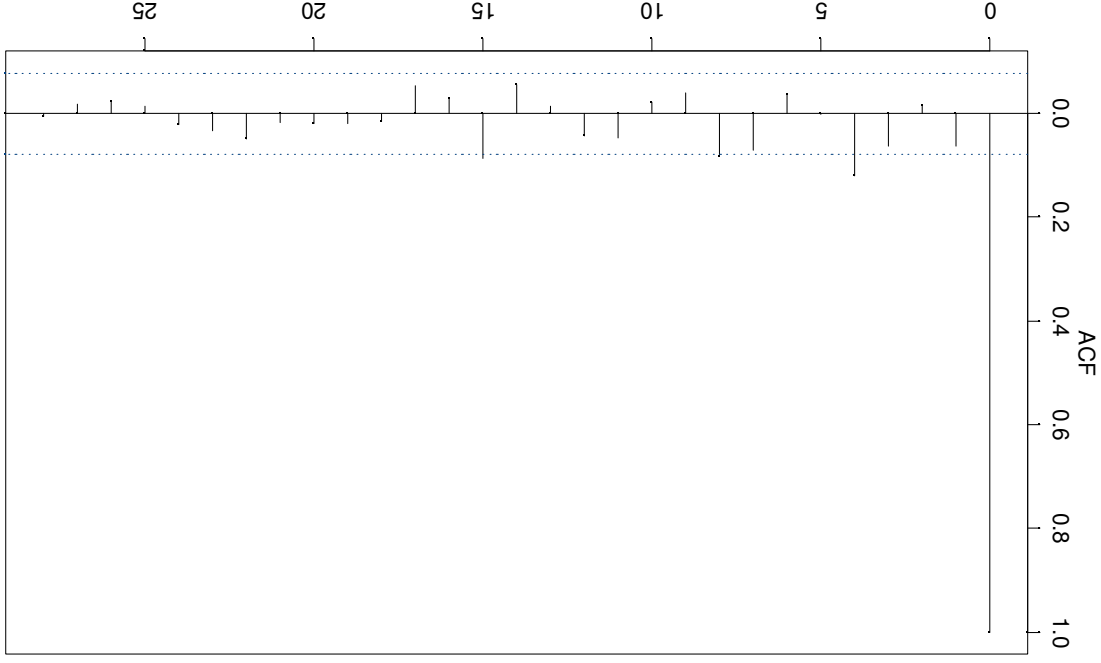


MERCADOS CAMBIALES



Mikosch, T. (2003). Modeling dependence and tails of financial time series. In: Finkenstaedt, B. and Rootzén, H. (Eds.) *Extreme Values in Finance, Telecommunications, and the Environment*. Chapman and Hall, pp. 185-286.

- Poca correlación entre las observaciones;
- Volatilidad estocástica;
- Distribuciones con colas pesadas;
- aparición de *clusters*.



- Medidas de riesgo: (*Capital Adequacy Directive of the Bank of International Settlement*), el capital de riesgo de un banco debe ser suficiente para cubrir posibles pérdidas de su cartera de valores en un periodo de 10 días en 99% de los casos.

Var: valor de pérdidas diarias que será ultrapasado, en media, una vez cada 20 días.

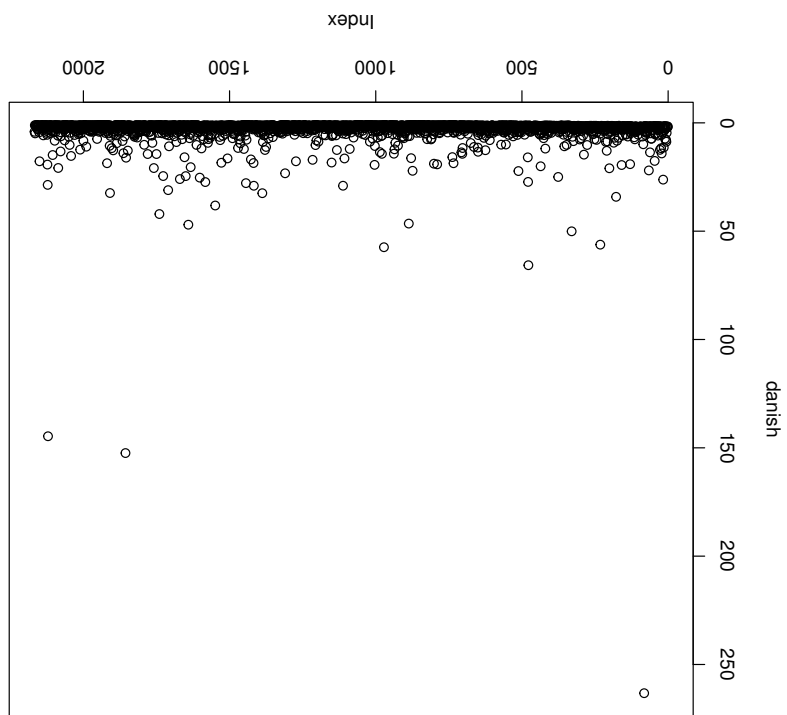
- Modelar las observaciones utilizando modelos (G)ARCH ajustando a los residuos una distribución t -de-Student.

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} X_t = \mu + \sigma_t Z_t, t \in \mathbb{Z} \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{array} \right. , P(X_t > x) \sim cx^{-\alpha}, x \rightarrow \infty,$$

McNeil, A. J. and Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7, 271-300.

Lauridsen, S. (2000). Estimation of value at risk by extreme value methods. *Extremes*, 3, 107-144.

Valor de las indemnizaciones: 3 Enero 1980, 31 Diciembre 1990.



INDEMNIZACIONES

TEORIA DE VALORES EXTREMOS

Sea (X_1, \dots, X_n) un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Teorema 1. Si existen constantes $(a_n > 0)$ e (b_n) tal que

$$P \left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) \rightarrow G(x), \quad n \rightarrow \infty,$$

entonces

$$G(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{\sigma}{x - \mu} \right) \right] \right\}_{-\frac{\xi}{1}}$$

con $\{x : 1 + \xi(x - \mu)/\sigma > 0\}$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, $-\infty < \xi < \infty$.

• Tipo I: (Gumbel)

$$G(x) = \exp \left[- \exp \left(\frac{\sigma}{x - \mu} \right) \right], \quad \xi = 0;$$

- Tipo II: (Fréchet), $\xi > 0$;
- Tipo III: (Weibull), $\xi < 0$.

OBJETIVOS

- Estimación de cuantiles de probabilidad elevados;
- Estimación del valor de retorno, z^d , asociado al periodo de retorno $1/d$. z^d representa el valor que será ultrapasado, en media, una vez cada $1/d$ unidades de tiempo. Por ejemplo, si disponemos de una serie de máximos anuales, z^d será ultrapasado por el máximo anual, para cada uno de los años, con probabilidad d .

$$z^d = \begin{cases} n - \frac{\xi}{d} [1 - \log(1 - d)] - n - \sigma \log\{1 - \log(1 - d)\} & \xi = 0 \\ n - \xi & \xi \neq 0 \end{cases}$$

con $G(z^d) = 1 - d$.

MÉTODO DE LOS MÁXIMOS ANUALES

Definición 1. Una distribución G es max-estable si, para $n = 2, 3, \dots$, existen constantes $(\alpha_n > 0)$ y (β_n) tal que

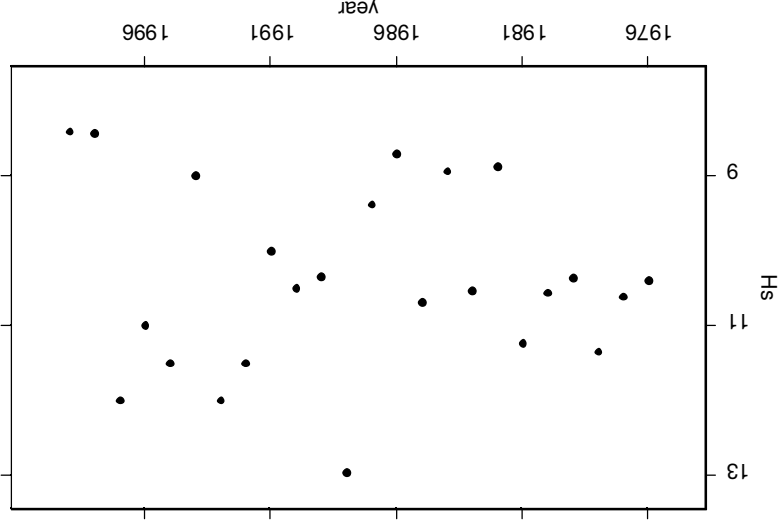
$$G_n(\alpha_n x + \beta_n) = G(x).$$

Sea (X_1, \dots, X_n) una sucesión i.i.d de máximos anuales. La distribución conjunta

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x_i}{n} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\} \times \dots$$

EJEMPLO

Serie de *Significant wave height*: Mar del Norte (Enero, 1976 - Diciembre, 1999)



Parámetros		Valores de retorno		
μ	9.97 (0.28)	25	50	100
σ	1.26 (0.19)	12.38 (11.83, 14.23)	12.70 (12.21, 15.32)	12.95 (12.34, 16.24)
ξ	-0.33 (0.12)			

$$\int_{\frac{\xi}{1}}^{\frac{\xi}{1} - 1} \left[\left(\frac{\rho}{n - (j)x} \right) \xi + 1 \right]^{-1} \prod_{j=1}^k \rho \times \left\{ \int_{\frac{\xi}{1}}^{\frac{\xi}{1} - 1} \left[\left(\frac{\rho}{n - (j)x} \right) \xi + 1 \right]^{-1} dx \right\} = f(x^{(1)}, \dots, x^{(u)})$$

es del siguiente tipo

$$\mathbb{M}_{(r)}^n = \left(\frac{a_n}{M_{(r)}^n - b_n}, \dots, \frac{a_n}{M_{(1)}^n - b_n} \right)$$

entonces para cualquier valor de r , $(r \in \mathbb{N})$, la distribución conjunta

$$P \left(\frac{a_n}{M_n - b_n} \leq x \right) \leftarrow G(x), n \rightarrow \infty,$$

Teorema 2. Si existen constantes $(a_n > 0)$ y (b_n) tal que

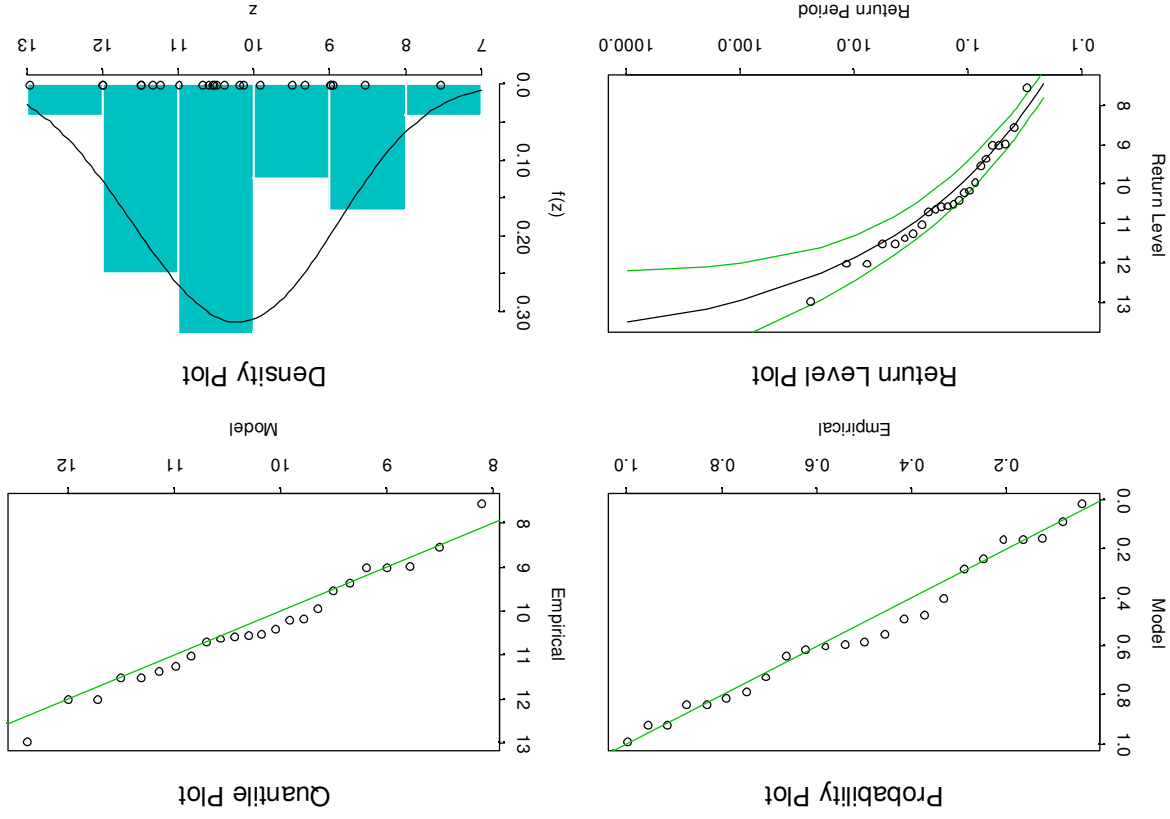
MÉTODO DE LAS r-MAYORES ESTADÍSTICA ORDINALES

EJEMPLO (continuación)

Serie de *Significant Wave Height*: Mar del Norte (Enero, 1976 - Diciembre, 1999)

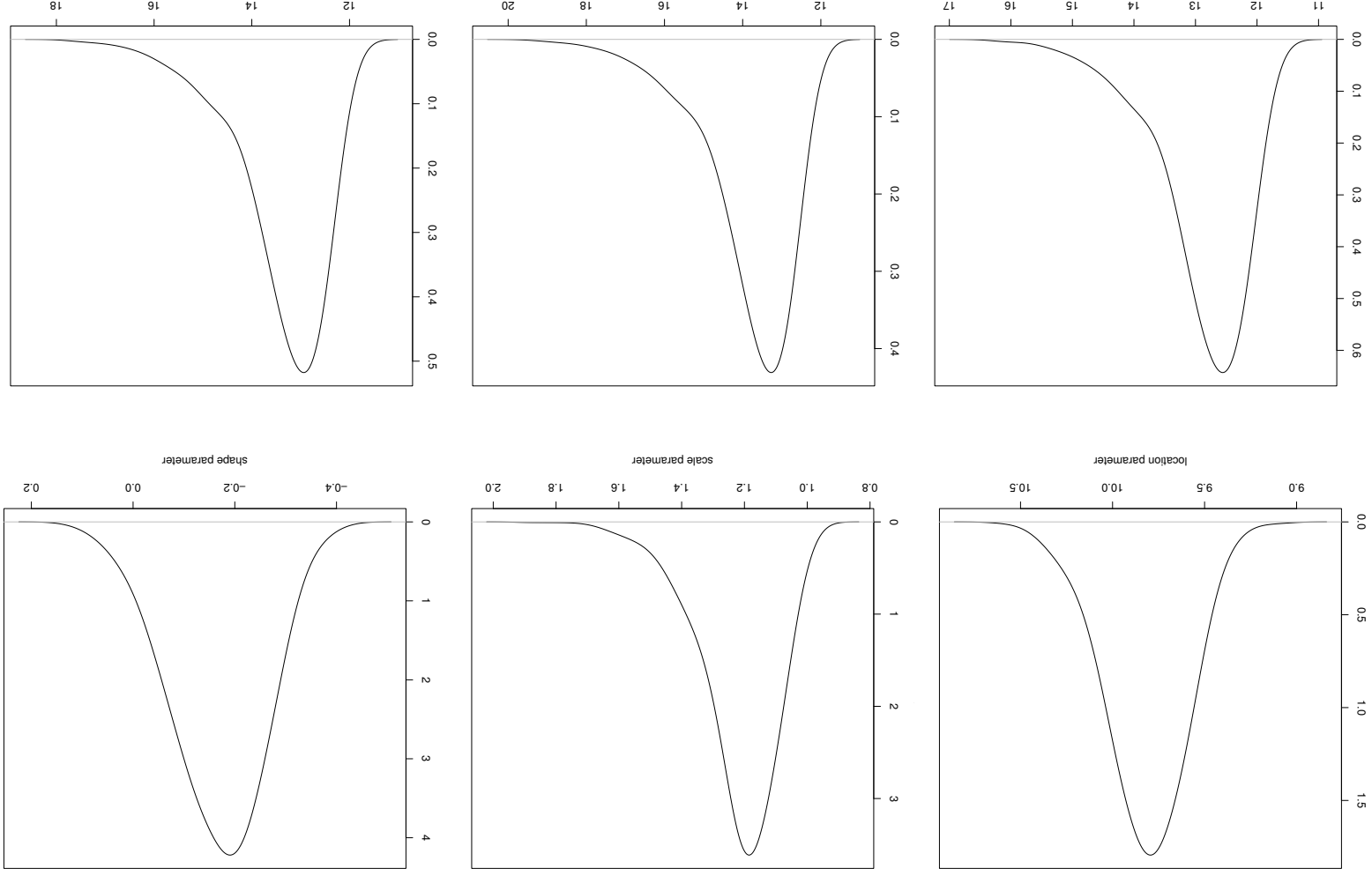
Parámetros		Valores de retorno				
	μ	σ	ξ	25	50	100
AM	9.97	1.26	-0.33	12.38	12.70	12.95
	(0.28)	(0.19)	(0.12)	(11.83, 14.23)	(12.21, 15.32)	(12.34, 16.24)
r-AM	9.81	1.22	-0.28	12.35	12.69	12.94
	(0.15)	(0.08)	(0.06)	(11.20, 12.53)	(11.72, 13.24)	(11.93, 13.70)

Guedes Soares, C. and Scotto, M. G. (2004). Application of the r-largest order statistics for long-term predictions of significant wave height. *Coastal Engineering*. **51**, 387-394.



EJEMPLO (continuación)

MÉTODOS BAYESIANOS (continuación)



MÉTODOS BAYESIANOS (continuación)

	Parámetros			Valores de retorno	
	μ	σ	ξ	25	50
Bayes	9.80 (0.163)	1.198 (0.092)	-0.183 (0.072)	12.90 (12.53, 13.21)	13.40 (12.91, 13.72)
				100	13.86 (13.28, 14.04)

Scotto, M. G. and Guedes Soares, C. (2006). Bayesian inference for long-term prediction of significant wave height. Preprint

MODELO POT (*Peak Over Threshold*)

La distribución de $(X - u) | X > u$ es aproximadamente

$$H(y) = 1 - \left(1 + \frac{\sigma^*}{\xi y}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

definida en $\{y : y > 0, 1 + \xi y / \sigma^* > 0\}$, siendo

$$\sigma^* = \sigma + \xi(n - u).$$

- Si $\xi < 0$ la distribución de excesos tiene *end-point* finito;
- si $\xi > 0$, tenemos excesos Pareianos.

EJEMPLO (continuación)

Serie de *Significant wave height*: Mar del Norte (Enero, 1976 - Diciembre, 1999)

Parámetros		Valores de retorno			
n	ξ	σ	25	50	100
7.5	-0.265	1.66	12.34	12.84	12.53
8	-0.262	1.54	12.38	12.63	12.90
8.5	-0.263	1.43	12.40	12.64	12.94

Observaciones horarias de O_3 : periodo 1991-1996. (Estación de Poble Nou).

Valores de retorno			
μ	3	10	40
	194.39	242.98	270.96
	(177.6, 212.8)	(227.6, 262.4)	(252.6, 294.2)

TEMPERATURAS MAXIMAS

1. Temperaturas horarias (1990-2003)

Barcelona (observatori Fabra) Manresa Sabadell Terrasa Lleida*	Barcelona (aeropuerto) Hospitallet Mataró S.C. Gramanet Girona Tarragona
--	---

	mxBCN-prat	mxBCN-fabra	mXHOS	mxBMAN	mXTAR
σ	3.57	3.10	4.42	5.08	3.64
ξ	0.18	0.37	0.02	0.32	0.23
	mXSAB	mXSCG	mXTER	mXGIR	mXTAR
σ	2.75	3.45	4.41	5.47	4.04
ξ	0.69	0.19	0.28	0.13	0.40

OTROS MÉTODOS

- Davison, A. C. and Ramsesh, N. I. (2000) Local likelihood smoothing of sample extremes. *J. Roy. Statist. Soc. B*, **62**, 191-208.
- Hall, P. and Tajvidi, N. (2000). Nonparametric analysis of temporal trend when fitting parametric models to extreme-value data. *Statist. Sci.*, **15**, 153-167.
- Ramsesh, N. I. and Davison, A. C. (2002). Local models for exploratory analysis of hydrological extremes. *J. Hydrol.*, **256**, 106-119.
- Chavez-Demoulin, V. and Davison, A. C. (2005). Generalized additive modelling of sample extremes. *Appl. Statist.* **54**, 207-222.

EXTREMOS DE SUCESIONES DEPENDIENTES

Definición 2. La sucesión estacionaria (X_n) verifica la condición $D(u_n)$, siendo (u_n) una sucesión de reales, se para todo $i_1 < \dots < i_p < j_1 < \dots < j_q > n$ tal que $j_1 - i_p \geq l$

$$|F^{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}(u_1, \dots, u_n) - F^{i_1, \dots, i_p}(u_1, \dots, u_n) F^{j_1, \dots, j_q}(u_1, \dots, u_n)| \leq \alpha_{n,l},$$

con $\alpha_{n,l} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) para alguna sucesión (l_n) , $l_n = o(n)$.

Teorema 3. Si (X_n) verifica la condición $D(u_n)$ y (k_n) es una sucesión de constantes tal que $k_n = o(n)$, $k_n l_n = o(n)$, $\alpha_{n, l_n} \rightarrow 0$, entonces

$$|P(M_n \leq u_n) - P^{k_n}(M_{r_n} \leq u_n)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\text{con } r_n = \lfloor n/k_n \rfloor.$$

EXTREMOS DE SUCESIONES DEPENDIENTES (continuación)

Teorema 4. Sea (X_n) una sucesión estacionaria que verifica la condición $D(u_n)$. Sea (X_n^*) una sucesión i.i.d. con la misma distribución marginal que la sucesión (X_n) y $M_n^* = \max_{1 \leq i \leq n} \{X_i^*\}$.

$$P(M_n^* \leq u_n) \rightarrow G(x), \quad n \rightarrow \infty,$$

si y solo si

$$P(M_n \leq u_n) \rightarrow H(x),$$

siendo

$$H(x) = G_\theta(x), \quad (0 < \theta \leq 1).$$

EXTREMOS DE SUCESIONES DEPENDIENTES (continuación)

Definición 3. La sucesión estacionaria (X_n) verifica la condición $D'(u_n)$ si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=2}^{[n/k]} P(X_1 > u_n, X_j > u_n) \rightarrow 0.$$

Teorema 5. Si la sucesión estacionaria (X_n) verifica la condición $D(u_n)$ y $D'(u_n)$,

$$P \left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) \rightarrow G(x), \quad n \rightarrow \infty.$$

EXTREMOS DE SUCESIONES DEPENDIENTES (continuación)

Definición 4. La sucesión estacionaria (X_n) verifica la condición $D''(u_n)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{r=1}^{n-1} P(X_1 > u_n, X_j \leq u_n \leq X_{j+1}) = 0.$$

Teorema 6. Si la sucesión estacionaria (X_n) verifica la condición $D(u_n)$ y $D''(u_n)$,

$$P(X_2 \leq u_n | X_1 > u_n) \rightarrow \theta,$$

si y solo si

$$P\left(M_n - b_n \leq x\right) \rightarrow H(x), n \rightarrow \infty.$$

EXTREMOS DE SUCESIONES DEPENDIENTES (continuación)

Definición 5. La sucesión estacionaria (X_n) verifica la condición $D^{(k)}(u_n)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nP(X_1 > u_n > \max_{2 \leq j \leq k} X_j, \max_{k+1 \leq j \leq r_n} X_j > u_n) = 0.$$

Teorema 7. Si la sucesión estacionaria (X_n) verifica la condición $D(u_n)$ y $D^{(k)}(u_n)$,

$$P\left(\max_{2 \leq j \leq k} X_j \leq u_n \mid X_1 > u_n\right) \rightarrow \theta,$$

si y solo si

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \leftarrow H(x), n \rightarrow \infty.$$

SUCESIONES PERIÓDICAS

Definición 6. La sucesión (Y_n) es T -periódica si $\exists T > 1$ (entero) tal que para cualquier $i_1, \dots, i_n, (Y_{i_1}, \dots, Y_{i_n})$ y $(Y_{i_1+T}, \dots, Y_{i_n+T})$ tienen la misma distribución.

Definición 7. La sucesión T -periódica Y verifica la condición $D_k(u_n)$ si $\exists k = \{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_n \alpha_{n, l_n} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{(k)}^{[k_n T/n]} = 0,$$

$$S_{(1)}^{[k_n T/n]} = \sum_{T} \sum_{j=r+1}^{j=r+k} \frac{T}{n} P(Y_r < u_n, Y_j < u_n),$$

con

y para $k \geq 2$

$$S_{(k)}^{[k_n T/n]} = \sum_{T} \sum_{j=r+1}^{j=r+k} \frac{T}{n} P(Y_r < u_n, Y_{j-1} \leq u_n > Y_j).$$

DISTRIBUCIÓN ASINTÓTICA DEL MÁXIMO

$$P(M_n \leq u_n) - e^{-\frac{T}{n} \sum_{r=1}^T P(X_r > u_n > M_{r+1, r+k-1})} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

con $M_{r,j} = \max_{r \leq i \leq j} (X_i)$ y $M_{r,j} = -\infty$ si $r > j$;

$$\frac{\frac{T}{n} \sum_{r=1}^T P(X_r > u_n > M_{r+1, r+k+1})}{\sum_{r=1}^T \frac{T}{n} P(X_r < u_n)} \rightarrow \theta, n \rightarrow \infty.$$

SUCESIONES PERIÓDICAS (continuación)

- La distribución F_{Y_r} , para $(r = 1, \dots, T)$ es del tipo

$$1 - F_{Y_r}(x) = x^{-\alpha} T_r(x), \quad r = 1, \dots, T,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_{Y_r}(x)}{1 - F_{Y_i}(x)} = \gamma_{i,r}, \quad r = 1, \dots, T, \quad i = 0, \dots, T - 1.$$



MEDIAS MÓVILES

- INMA (*Integer-valued Moving Average*)

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \circ Z_{n-j},$$

$$\psi \circ Z = \sum_{s=1}^{\infty} B_s(\psi), \quad \psi \in [0, 1],$$

siendo $\{B_s(\psi)\}$ una sucesión de v.a. de Bernoulli (i.i.d.) con $P[B_s(\psi) = 1] = \psi$

MEDIAS MÓVILES (continuación)

- Para $r = 1, \dots, T$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_r > x)}{P(Z_r > x)} = \sum_{s=0}^{T-1} \gamma_{r-s,r} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{\alpha}^{jT+s}$$

- Distribución asintótica del máximo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n) = \exp\{-\theta x_{-\alpha}\}$$

siendo $\mu_n = a_n x$ con

$$a_n \sim \frac{1}{T} \left(\sum_{r=1}^T \gamma_{r,1} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_{\alpha}^j \right) F_{Z_1}^{-1}(1 - n^{-1}).$$

ÍNDICE EXTREMAL

- Índice extremal para la sucesión periódica

$$\frac{\sum_T \sum_{r=1}^r \lambda_{r-1} \sum_{s=0}^{s=r} \lambda_{r-s} \sum_{j=0}^j \psi_{\alpha}^{jT+s}}{\left\{ \sum_T \sum_{r=1}^r \lambda_{r-1} \sum_{s=0}^{s=r} \lambda_{r-s} \sum_{j=0}^j \psi_{\alpha}^{jT+s} - \max_{h > jT+s} \psi_{\alpha}^h \right\}} = \theta$$

- Índice extremal para la sucesión estacionaria

$$\frac{\sum_{\infty}^j \psi_{\alpha}^{jT+s}}{\max_{0 \leq j \leq \infty} \psi_{\alpha}^j} = \theta$$

EJEMPLO

$$X_n = \frac{1}{1} \circ Z_n + \frac{3}{1} \circ Z_{n-1} + \frac{4}{1} \circ Z_{n-2} + \frac{5}{1} \circ Z_{n-3},$$

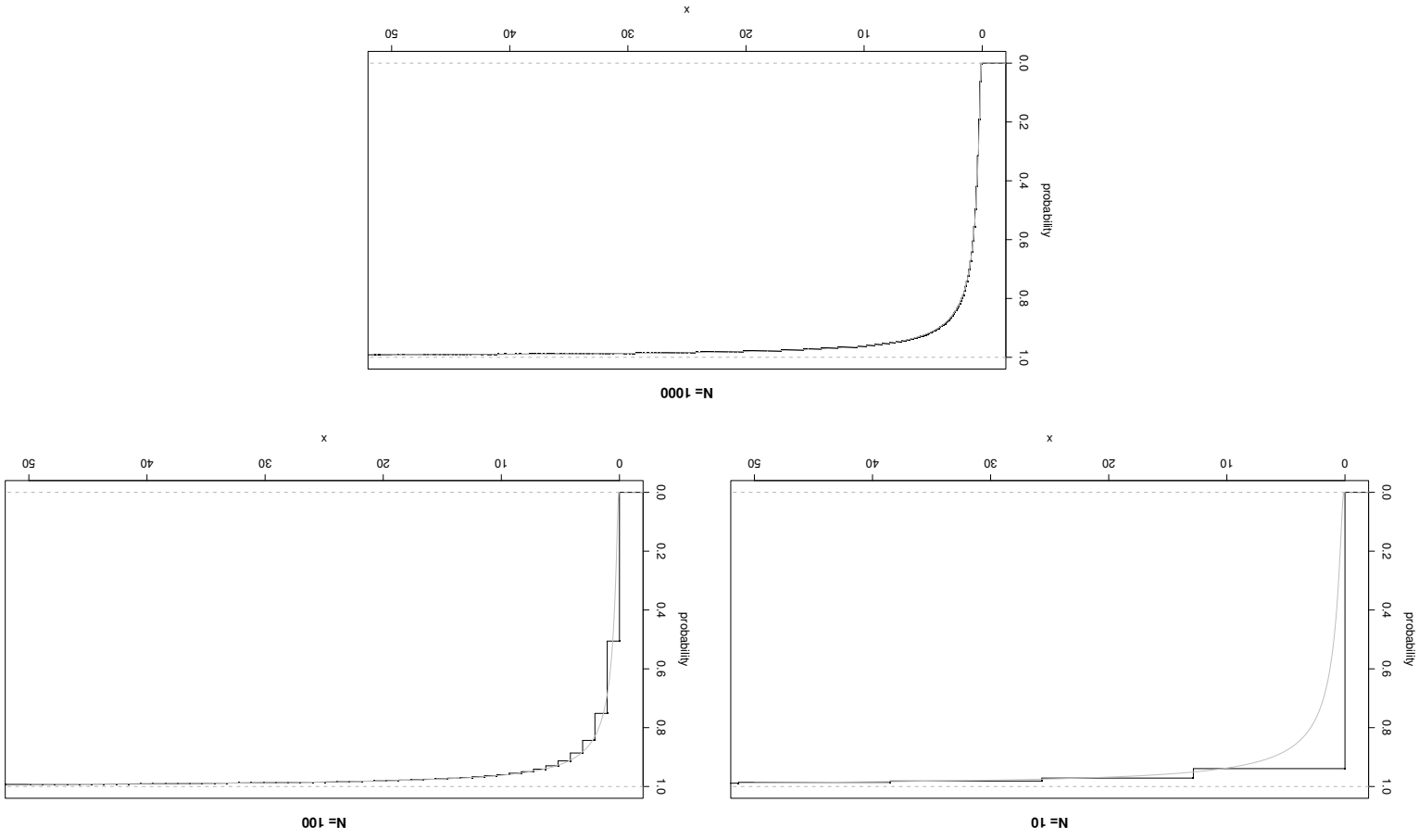
$$Z_r \sim F_r(x) = \begin{cases} e^{-\frac{[100x+1]^\alpha}{1}} & \text{para } r \text{ par} \\ e^{-\frac{[200x+1]^\alpha}{1}} & \text{para } r \text{ impar} \end{cases}, \quad x \in \mathbb{N}_0,$$

$$\theta = \frac{2^{-\alpha} + 3^{-\alpha} + 4^{-\alpha} + 5^{-\alpha}}{2^{-\alpha}}.$$

• Índice extremal

-
-

EJEMPLO (continuación)



SDE

$$X_k = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{s=1}^{j-1} A_{k-s} \right) B_{k-j}, \quad k \in \mathbb{N},$$

siendo

- $(A^k, B^k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión T -periódica de pares independientes de variables aleatorias en \mathbb{R}_+^2 , tal que las colas $\underline{F}_r(x) = P(B_r > x)$, $r = 1, \dots, T$, son de variación regular del tipo

$$\underline{F}_r(x) = x^{-\alpha} L_r(x), \quad r = 1, \dots, T;$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\underline{F}_i(x)}{\underline{F}_r(x)} = \gamma_{i,r}$, $r = 1, \dots, T$, $i = 0, \dots, T-1$

- (A_1, \dots, A_T) tienen distribuciones con colas menos pesadas que las colas de las distribuciones de (B_1, \dots, B_T) tal que

$$EA_r^\alpha > 1, \quad r = 1, \dots, T,$$

SDE (continuación)

Proposición 1. Para $r = 1, \dots, T$

$$X_r = \sum_{i=0}^{T-1} X_r^{(i)},$$

siendo

$$X_r^{(i)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{s=1}^{T(j-1)+i} A_{r-s} \right) B_{r-(j-1)(T-i)-1}.$$

Teorema 8. Para $r = 1, \dots, T$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_r > x)}{P(B_r > x)} = \frac{1 - \prod_{T=1}^s EA_{r-s}^{\alpha}}{\gamma_{r+T-i-1, r}} \left(\prod_{i=1}^s EA_{r-s}^{\alpha} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_k > x)}{P(B_1 > x)} = \frac{1 - EA_1^{\alpha}}{1}.$$

SDE (continuación)

Distribución asintótica del máximo $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} (X_k)$.

Corolario 1. cuando $n \rightarrow \infty$

1.

$$P(M_n \leq a_n x) \rightarrow \exp \left\{ -\frac{1}{\alpha} E W_\alpha x^{-\alpha} \right\},$$

con

$$W = \bigvee_T \bigvee_{r=1}^T \gamma_{r,1} \bigvee_{T-1}^{i=0} \left(\bigvee_{\infty}^{j=1} U_{1,1,r} \times \dots \times U_{1,T(j-1)+i,r} \right);$$

2. la sucesión periódica \mathbf{X} tiene índice extremal

$$\theta = \frac{\sum_T \sum_{r=1}^T \gamma_{r,1} \sum_{T-1}^{i=0} \left(\prod_{s=1}^i E A_\alpha^{r-s} \right) \gamma_{r+T-i-1,r}}{\{1 - \prod_T^{s=1} E A_\alpha^{r-s}\} E W_\alpha}.$$

Scotto, M. G. (2005), Extremes of a class of deterministic sub-sampled processes with applications to stochastic difference equations. *Appl. Process. Stoch. Appl.* **115**, 417-434.

EJEMPLO

Supongamos que X_k satisface la ecuación

$$X_k = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{s=1}^{j-1} b Z_2^{k-s} \left(b Z_2^{k-j}, k \in \mathbb{N}, \right.$$

siendo $b > 0$ una constante positiva.

- $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (b Z_2^k, b Z_2^k)$;

- Por otro lado asumiremos que

$$\underline{F}_r(x) = P(Z_2^r > x) = x^{-\alpha/2} L_r(x), \quad r = 1, \dots, T,$$

y que

$$b^{\alpha/2} E Z_2^{\alpha/2} > 1, \quad r = 1, \dots, T.$$

EJEMPLO (continuación)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_r > x)}{P(Z_2^r > x)} = \frac{b^{\alpha/2}}{\sum_{i=0}^{T-1} \prod_{s=1}^i E Z^{\alpha/2}_{r-s}} \left(1 - b^{\alpha/2} \prod_{s=1}^i E Z^{\alpha/2}_{r-s} \right)^{\gamma_{r+T-i-1, r}},$$

para $r = 1, \dots, T$;

$$\theta = \frac{b^{\alpha/2} \sum_{i=1}^r \gamma_{r, i} \sum_{i=0}^{T-1} \prod_{s=1}^i E Z^{\alpha/2}_{r-s}}{(1 - b^{\alpha/2} \prod_{s=1}^i E Z^{\alpha/2}_{r-s}) E W^{\alpha/2}}.$$