21 Maig 2009

Gestió del risc:

Value-at-Risk

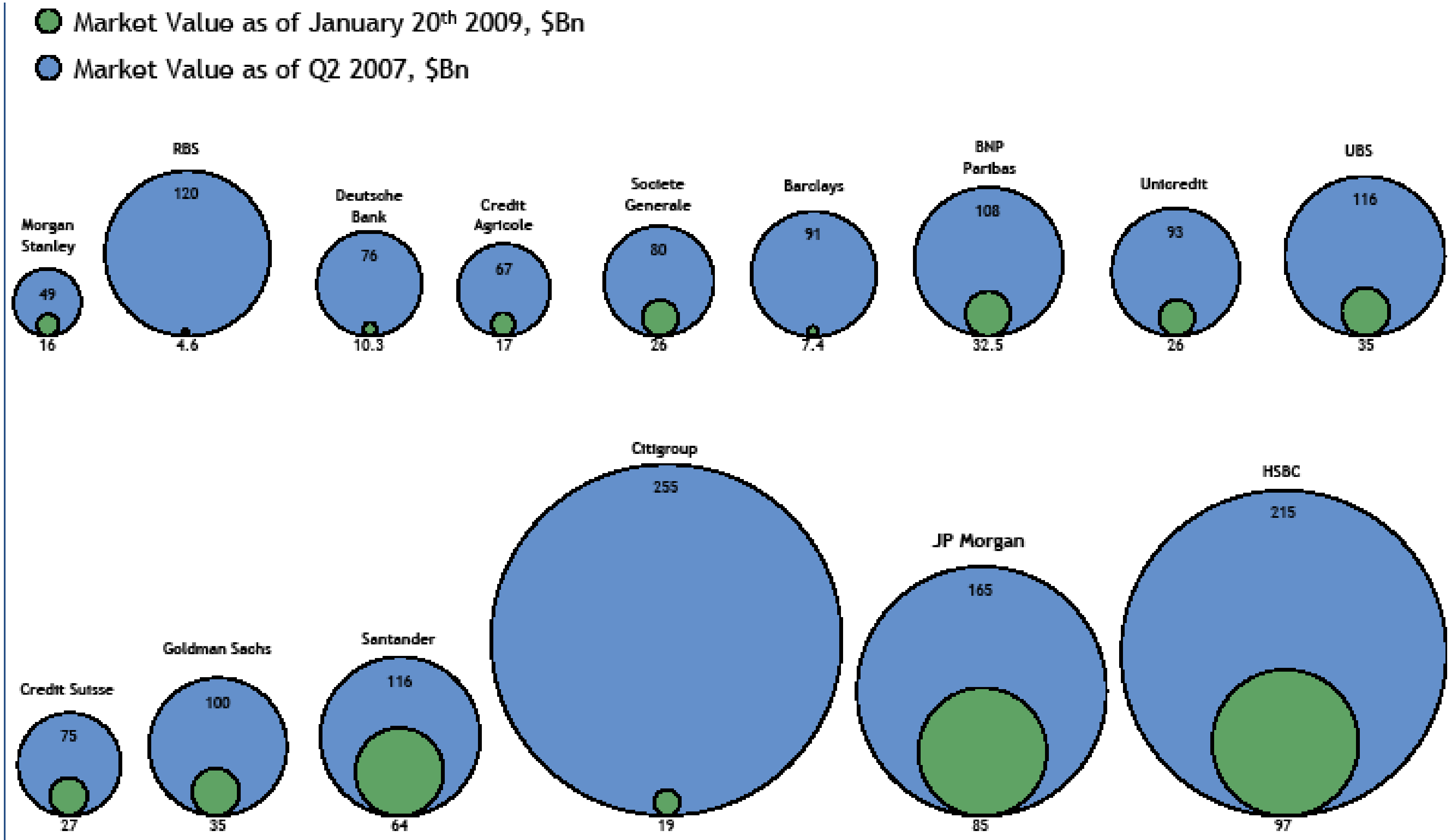
Seminari Servei d'estadística UAB

R. Alemany

Crèdit Andorrà

Índex .-

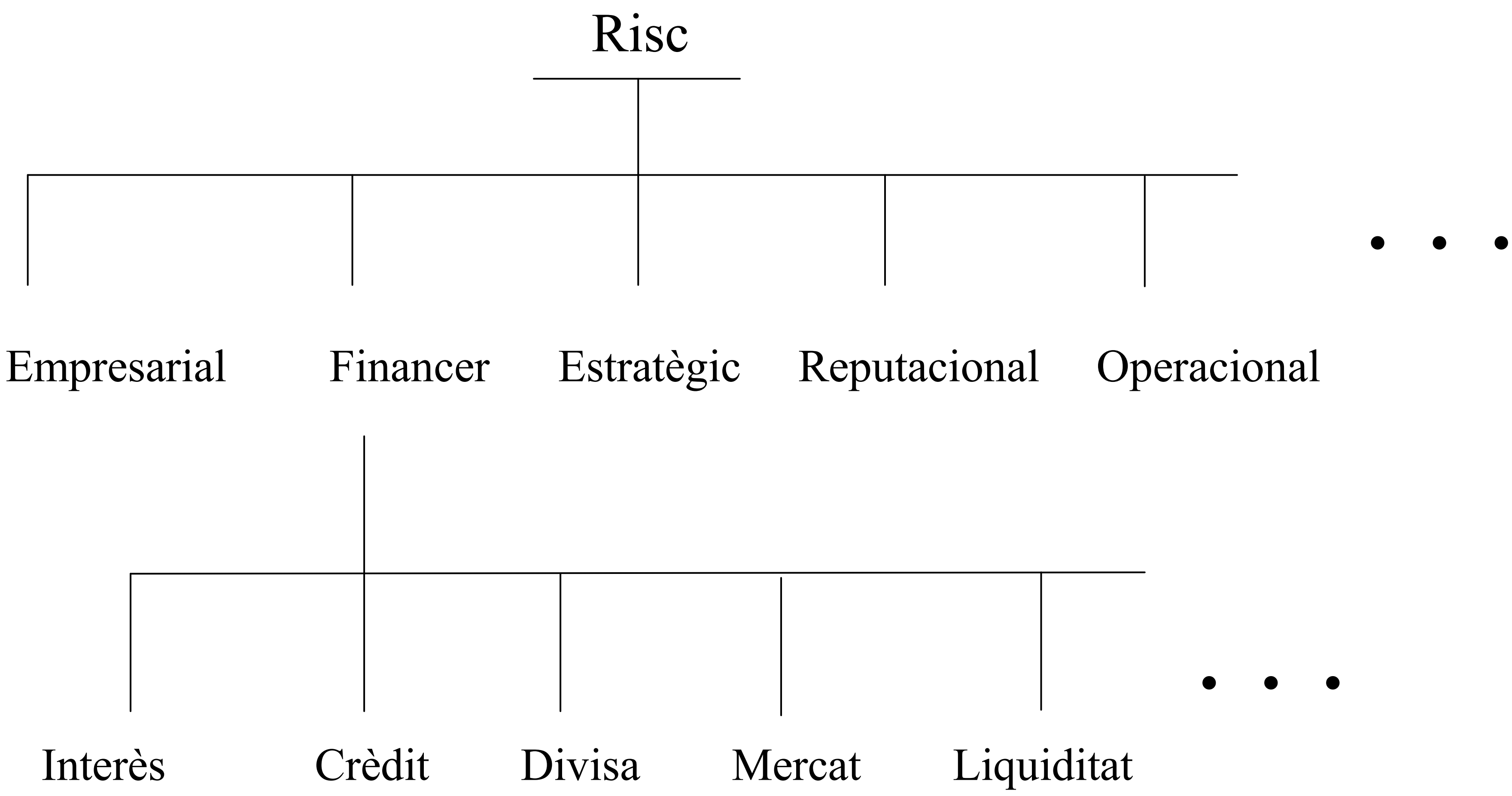
Banks: Market Cap



JPMorgan

Source: Bloomberg, Jan 20th 2009

La Gestió del Risc



Directrius de Basilea II

$$\frac{Capital\ \ Total}{Risc\ de\ crédit + Risc\ de\ Mercat + Risc\ Operacional} = Rati\ Capital > 8\%$$

Balanç

- Carteres d'Inversió
- Cartera a Venciment
- Cartera Crediticia
- Detenció dels actius fins a Venciment
- Cartera de Negociació
- Actius a valor de mercat

Risc de Credit

- Portafolis d'Inversió
- Derivats

Risc de Mercat

- Renda Fixa
- Renda Variable
- Divises
- Materies Primeres
- Divises
- Materies Primeres

Risc Operacional

Complexitat

− / +

Metodologies

Credit	*Standardized Approach*
	Foundationl Internal Ratings Based Approach
	Advanced Internal Ratings Based Approach
Mercat	*Standardized Approach*
	Internal Models Approach
Operacional	*Basic Indicator Approach*
	Standardized Approach
	Advanced Measurement Approach

La Gestió del Risc

- Es constata que el risc de tipus d'interès i el risc de liquiditat no han desenvolupats amb el mateix detall que altres riscos financers en les directrius de Basilea II.

- La regulació referent als actius fora de balanç (*off – Balance*) serà igualment objecte d'una reflexió més profunda.

- El negoci bancari habitualment transforma el risc, assumint-ne una part i venen l'altre en certs casos i sota unes condicions especifiques.

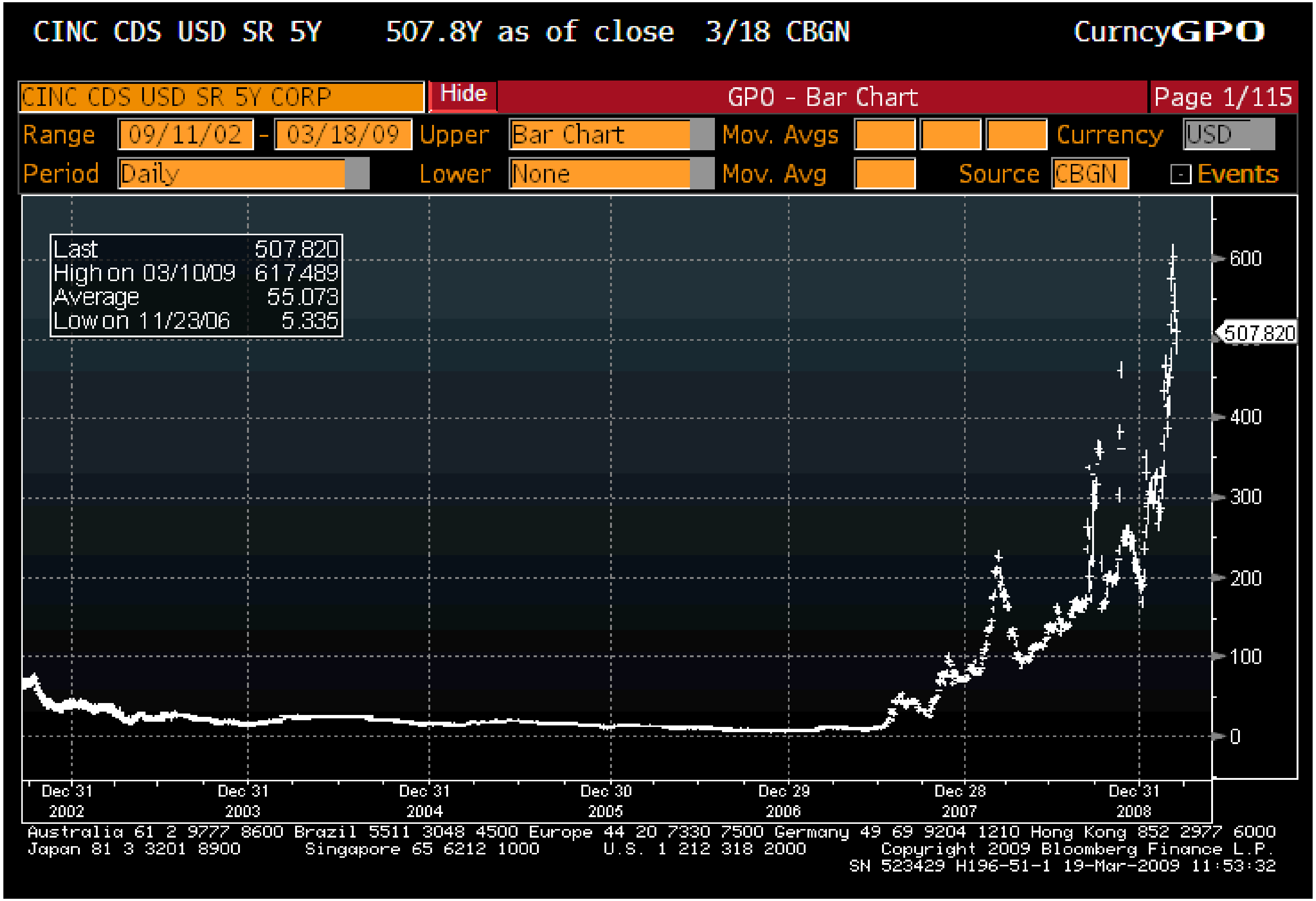
- El risc és una percepció.

- Risc versus incertesa

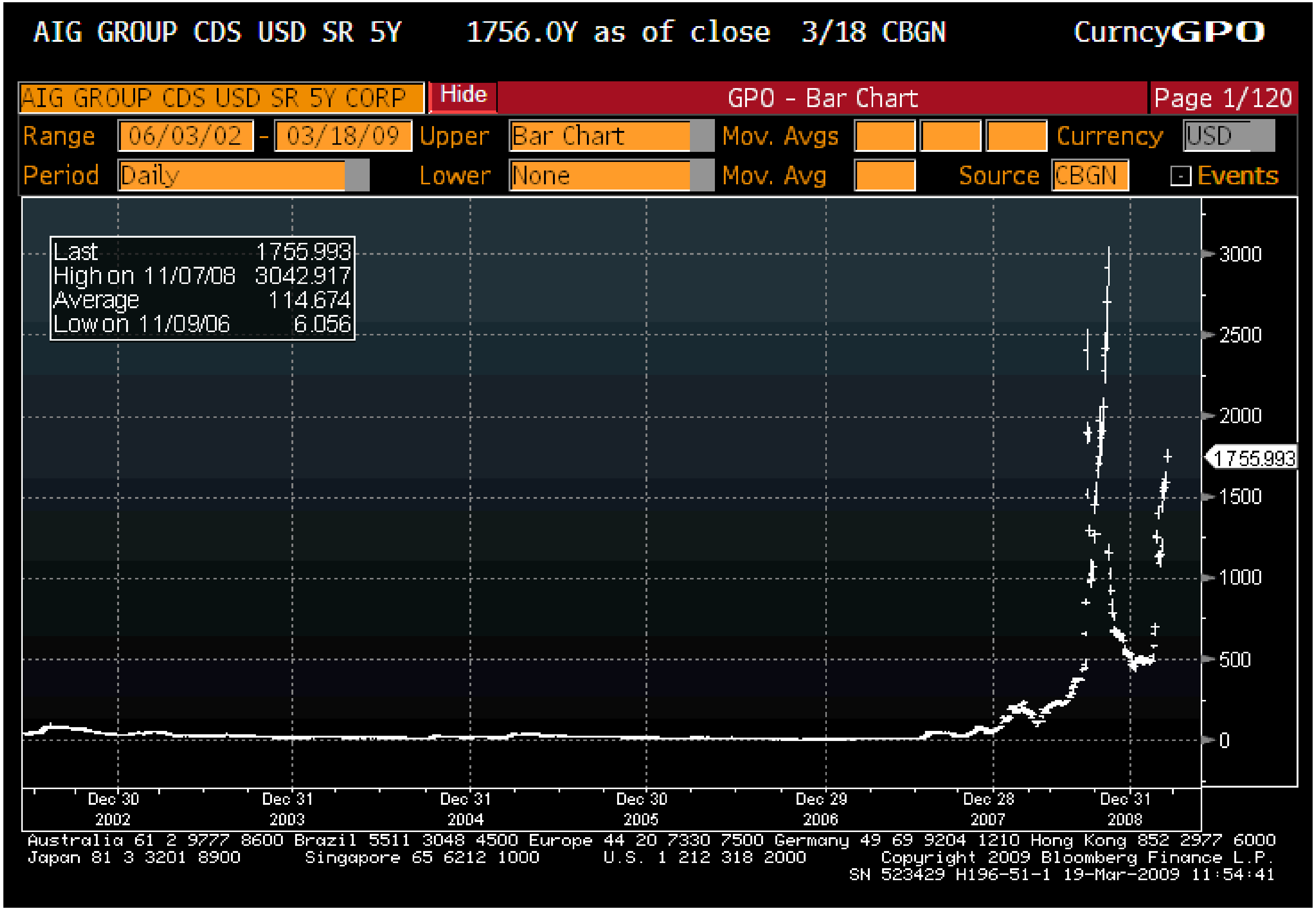
- L'estimació global del risc és un problema *N-dimensional*

- Les empreses han d'evitar en una situació de Stress. Si aquest es materialitza aleshores és el Stress qui gestiona l'empresa. Per exemple, es perd l'accés al mercat de capitals i per tant a la financiació.

Cotització del CDS (*Credit Default Swap – diferencial de crèdit*) a 5 anys per Citigroup

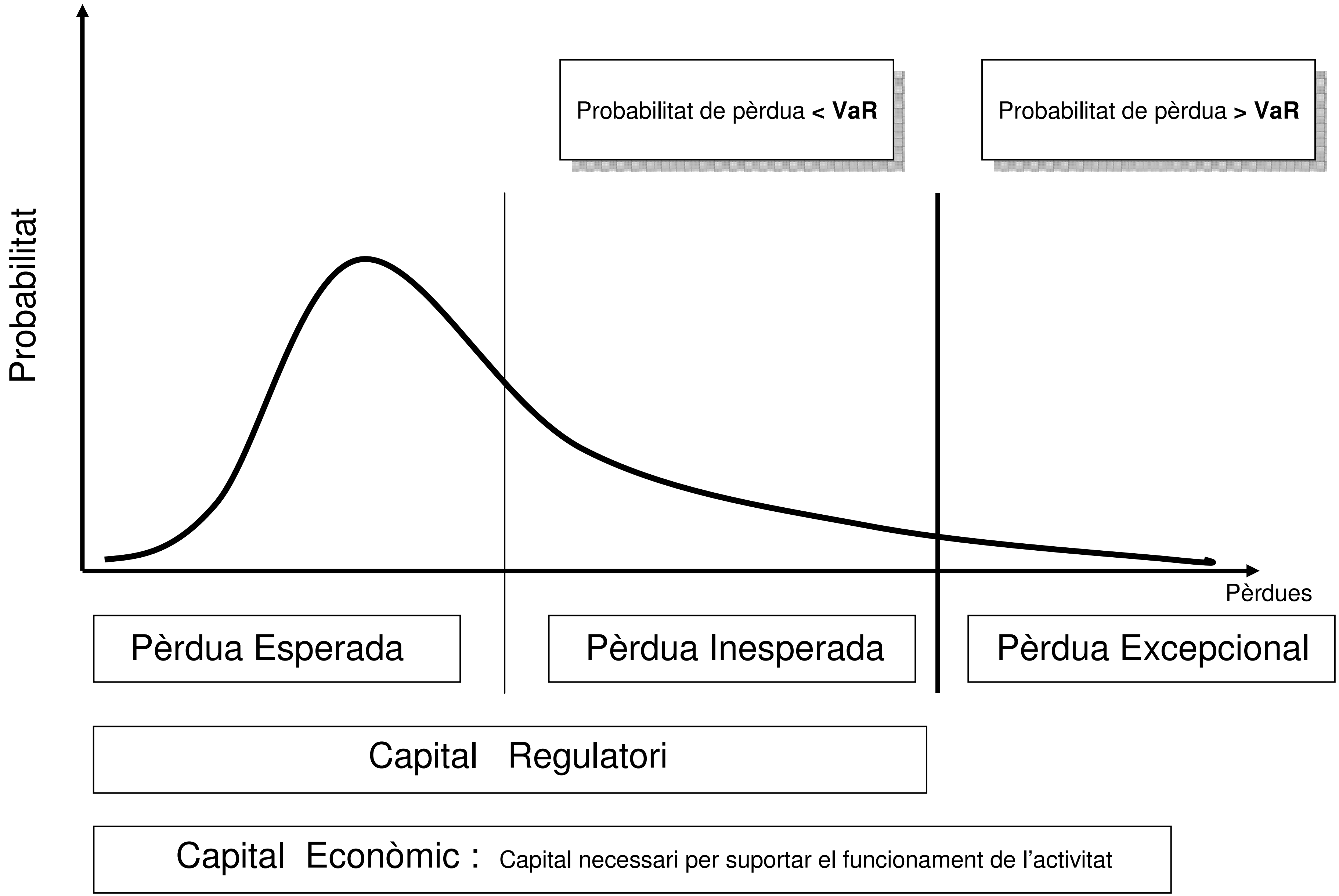


Cotització del CDS (*Credit Default Swap – diferencial de crèdit*) a 5 anys per AIG



Cotització de les accions AIG en els darrers 29 anys

Implicacions per les mesures de risc



Implicacions per les mesures de risc

- Què han de prendre en compte les mesures de risc ?

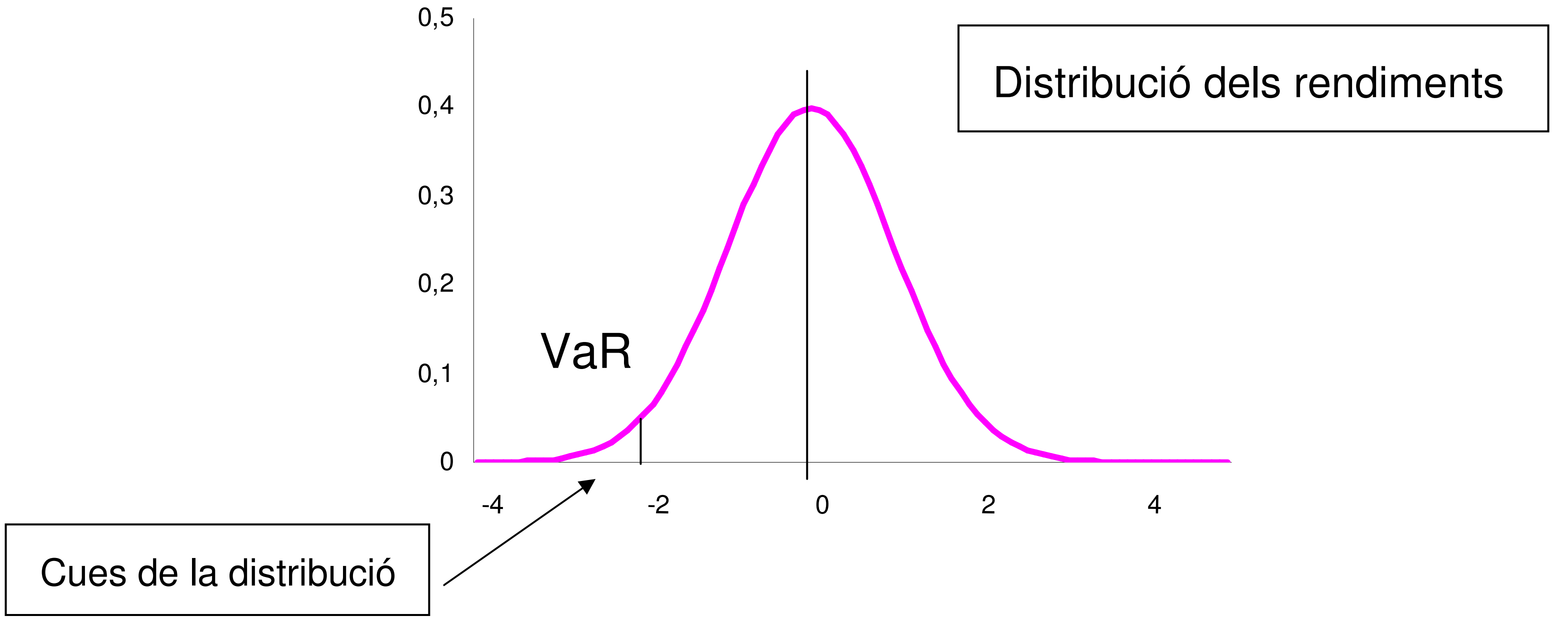
$$\boxed{Risc = Exposició * Intensitat * Variabilitat}$$

- És la volatilitat una bona mesura ?
- En general, la volatilitat és de gran utilitat, però no dona una visió completa del risc. La volatilitat dona el mateix pes a la pujada que a la baixada.
- Les empreses acostumen a estar més preocupades pel potencial de baixada.
- Cal una mesura que accentuí més el risc de baixada.

Definició del *Value-at-Risk*

Valor-en-Risc : Mesura la pitjor pèrdua que es pot produir en una inversió en un horitzó de temps donat i a un nivell de confiança sota condicions de mercat normals.

- En altres paraules, proporciona una mesura del risc per mitja de models estadístics i simulacions designats a capturar la variabilitat dels actius d'un portafoli d'inversions.



Definició del *Value-at-Risk*

- En termes més amplis, la metodologia VaR pot prendre en compte en un mateix portafoli els efectes deguts a l'apalancament, les divises, tipus d'interès, ... i en particular els instruments derivats (opcions call, opcions put, swaps, futurs, ...), i en conseqüència, comporta la necessitat de valoració de tot el conjunt d'actius.

- De forma genèrica, la valoració d'un instrument derivat en el temps T que depèn del spot S, consisteix en el valor present dels pagament futurs F(S) segons la distribució de S:

$$f_t = E^*\left[e^{-r(T-t)}F(S_T)\right]$$

- El VaR mesura la variació en valor de l'actiu a T:

$$VaR(c,T) = E\left[F_T\right] - Q\left[F_T, c\right]$$

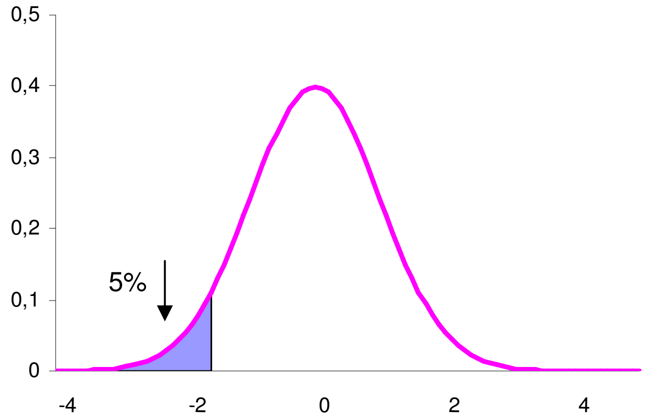
on $Q[F_T,c]$ és el percentil corresponen al nivell de confiança c.

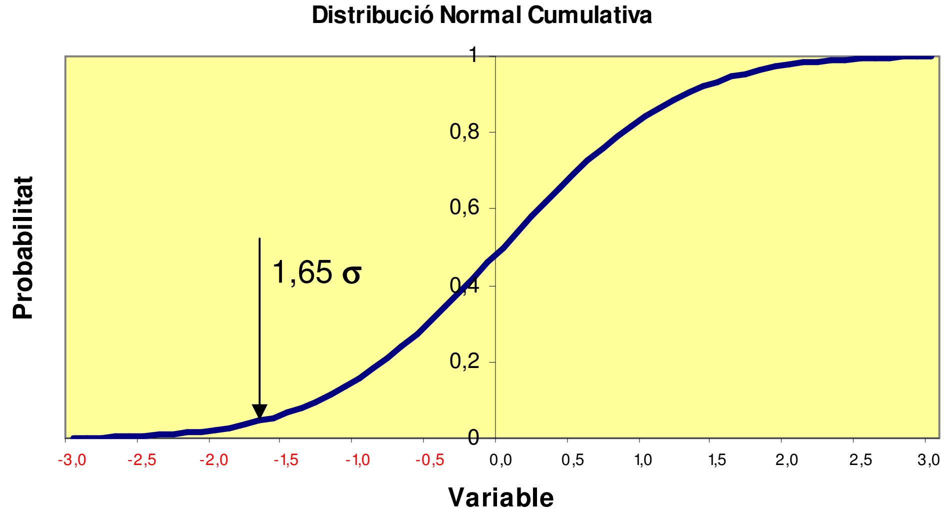
* Indica que el camí recorregut per l'actiu està sota la hipòtesis *risk-neutral*

Definició del *Value-at-Risk*

- Si els rendiments estan distribuïts de forma Gaussiana, el valor mig i la variança descriuen completament la distribució.

- Per conèixer la distribució, cal obtenir la variança de la cartera i el rendiment esperat.





$$c = \int_{-VaR}^{\infty} f(x)dx$$

$$fer(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

$$\text{Si } x = 1.645 \quad \Rightarrow \quad fer(x) = 0.95$$

$$\text{Si } x = 2.326 \quad \Rightarrow \quad fer(x) = 0.99$$

Mètodes per obtenir les distribucions

- Mètode Paramètric: S'escolleix una distribució i es determinen els seus paràmetres. Posteriorment, és calcula el VaR analíticament o a traves d'una simulació Monte Carlo.

- Simulació històrica: S'assumeix que els rendiments futurs estaran representats per la mateixa distribució que en el passat. Es calcula el VaR a través d'una simulació utilitzant les dades històriques.

Conditional Value-at-Risk

- Una de les limitacions que a tenir present es constat que quan es realitza una pèrdua superior al VaR, aleshores no hi ha cap estimació de quan més es pot perdre !

- Una magnitud d'interés és doncs, el CVaR, que consisteix en el valor esperat de la pèrdua una vegada s'excedeix un cert valor de VaR.
  Sigui –q el valor de VaR, aleshores es defineix:

$$E\left[X \middle| X < q\right] = \frac{\int_{-\infty}^{q} x f(x)dx}{\int_{-\infty}^{q} f(x)dx}$$

- Donat que CVaR és una mitjana de les pèrdues en la cua de la distribució, aquesta mesura té la propietat de ser una mesura de risc subaditiva.

- Aquesta propietat és emprada per l'optimització de portafolis i derivar de forma equivalent la frontera eficient proposada per Markowitz.

Factors de Risc de Mercat (I)

Renda variable:

- Els actius individuals poden ser tractats per mitjà de dels factors β respecte als índex globals de referència.
- Si existeixen també pot millorar el seu tractament, la utilització d'índexs sectorials.
- En darrera instancia, es poden escollir els actius individualment.

Renda Fixa:

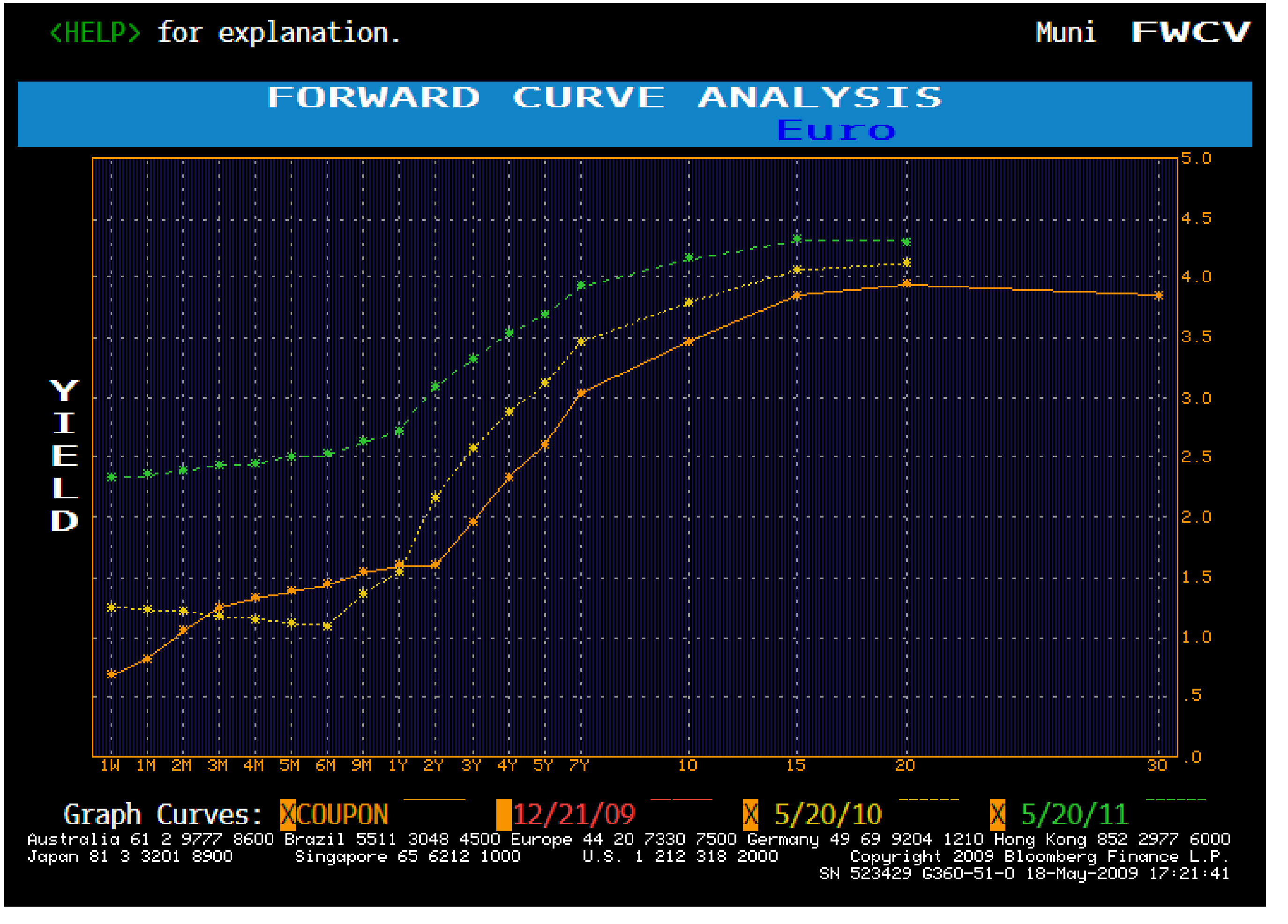
- Per aquests tipus d'actius cal considerar l'efecte de:

  - Efecte degut a les variacions de l'estructura dels tipus d'interès. Variables amb reversió a la mitja.

  - Efecte originat per la variació de la qualitat creditícia: Diferencials de crèdit, variació de ratings,...
    En temps de recessió, les correlacions poden ser molt importants.

Factors de Risc de Mercat (II)

Estructura temporal dels tipus d'interès: 1 setmana fins a 20 anys; amb les seves respectives projeccions a 20/05/2010 i 20/05/2011.



Factors de Risc de Mercat (III)

Renda Fixa:

- La *yield curve* (corba de factors de descompte) haurà de descomposar-se amb un mínim de 6 trams, a fi i efecte, de copsar els efectes en la variació dels actius.
- Igualment es necessari disposar d'una corba de tipus d'interès originada a partir de deute corporatiu. I si s'escau amb diferents ratings.

Divises:

- Tots els actius sotmesos a risc de divisa hauran d'incloure el seu factor de risc corresponent a la divisa afectada.

Matèries Primeres:

- S'estableixen índexs agrupats per categories

Càlcul de la volatilitat segons Riskmetrics

- En el càlcul de la volatilitat cal definir el nombre d'observacions a considerar. Solució: mitja mòbil exponencial.

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1-\lambda}{dt} \sum_{j=-\infty}^{i} \lambda^{i-j} \cdot r_j^2}$$

- Aquest procediment evita igualment el efecte de ***plateauing***
- Expressat altrament :

$$\sigma_i^2 = \lambda \cdot \sigma_{i-1}^2 + (1-\lambda) \cdot r_i^2$$

- Típicament lambda esta entre 0.94 i 0.97 (*decay factor*)

Càlcul de la correlació segons Riskmetrics

- Riskmetrics calcula la covariança entre dos actius de forma similar a com ho fa en el cas de la volatilitat.

$$\sigma_{12i}^{2} = \lambda \cdot \sigma_{12i-1}^{2} + (1 - \lambda) \cdot r_{1i} \cdot r_{2i}$$

- Cal tenir present que els canvis horaris no amaguin actius amb correlacions importants.
- El mètode de Riskmetrics no garanteix que la matriu sigui definida de forma positiva.

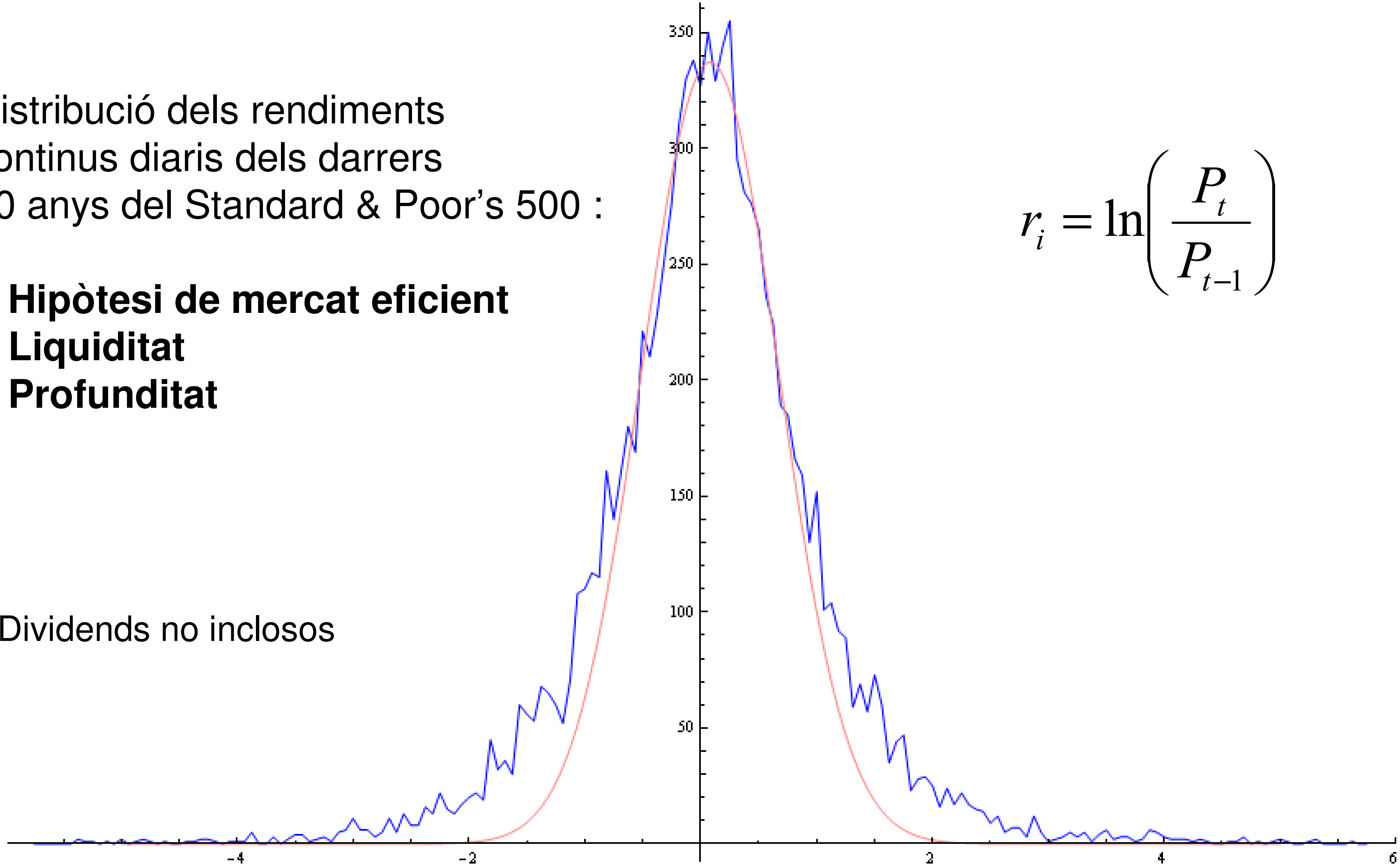
S & P 500 Index

Distribució dels rendiments
continus diaris dels darrers
40 anys del Standard & Poor’s 500 :

- **Hipòtesi de mercat eficient**
- **Liquiditat**
- **Profunditat**

$$r_i = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Dividends no inclosos

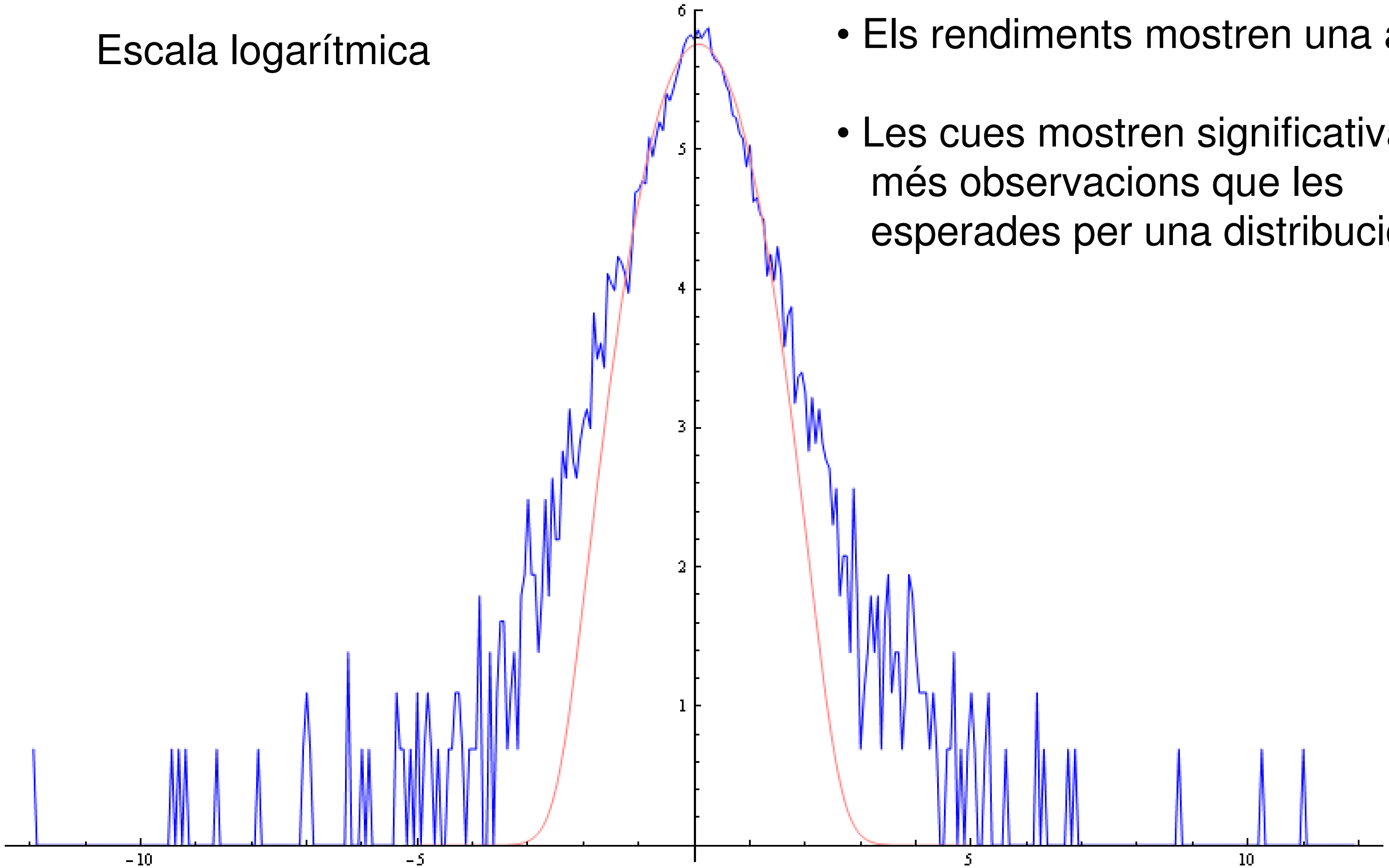


Rendiments

Font: Bloomberg

S & P 500 Index

Escala logarítmica

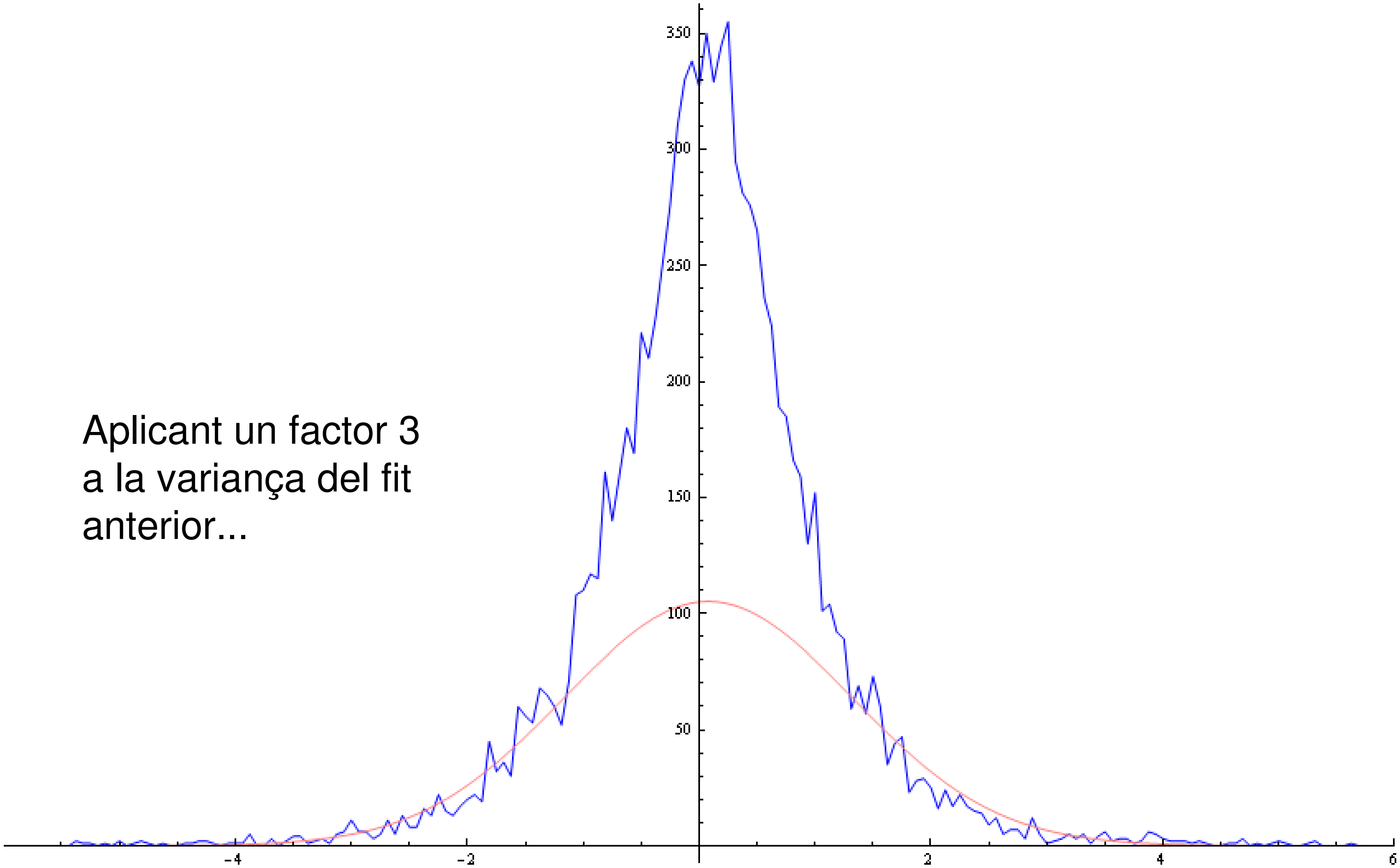


- Els rendiments mostren una asimetria
- Les cues mostren significativament més observacions que les esperades per una distribució normal

Rendiments

Font: Bloomberg

S & P 500 Index



Aplicant un factor 3 a la variança del fit anterior...

Rendiments

Font: Bloomberg

Generalització del VaR (I)

- En el cas de distribucions no gaussianes, es pot derivar una expressió analítica pel VaR a través dels paràmetres que caracteritzen la distribució dels rendiments.
- El grup de Riskmetrics ha treballat amb varies possibilitats:
  - Transformacions de Johnson
  - Expansió de Cornish-Fisher
  - Mètode de Fourier
- L'expansió de Cornish-Fisher és més ràpida i tractable, tot i que no és prou acurada en distribucions tipus delta-Dirac.

Generalització del VaR (II)

- L'expansió de Cornish-Fisher ve donada per la següent expressió:

$$VaR = S \cdot z \cdot \sigma$$

$$z = z_c + \tfrac{1}{6}\left(z_c^2 - 1\right)S + \tfrac{1}{24}\left(z_c^3 - 3z_c\right)K - \tfrac{1}{36}\left(2z_c^3 - 5z_c\right)S^2$$

- Z_c és el valor crític per la probabilitat (1-α). -1.96 per 95% C.L. i -2.33 per 99 % C.L.
- S = skewness i *K* = excés de kurtosis = 3 - K

Generalització del VaR (III)

- Skewness: Mesura de l'asimetria d'una distribució

$$S = \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \overline{y}\right)^3}{\sigma^3}$$

- Kurtosis: Mesura la densitat de les cues de les distribucions

$$K = \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \overline{y}\right)^4}{\sigma^4}$$

Predicions sobre la volatilitat

- Generalment, les variacions fortes de volatilitat persisteixen durant 2 o 3 setmanes, però no més.
- Per tant, quan s'intenta predir la volatilitat sobre el curt termini la recent té més importància però cal permetre igualment que la volatilitat canviï.
- Les volatilitats es poden preveure sobre el curt termini però no sobre el llarg.

Christoffersen, Peter F. and Francis X. Diebold. "How Relevant Is Volatility Forecasting For Financial Risk Management?," Review of Economics and Statistics, 2000, v82(1,Feb), 12-22.

Derivats i Opcionalitat Implícita

- Habitualment, les carteres de les institucions financeres contenen un cert nombre de derivats. Un bon nombre acostumen a ser implícits degut a les pràctiques de mercat.

  - Saldos disponibles a la vista, comptes d'estalvi sense venciment, ...
  - Amortització anticipada total / parcial d'una hipoteca

- La distribució de rendiments dels productes derivats es desvia fortament de la distribució normal.

- Amb derivats, és per exemple possible que una cartera **A** amb una volatilitat més gran que una cartera **B**, tingui un VaR tal que **VaR(A) < VaR(B)**

Metodologies *Value-at-Risk (I)*

VaR paramètric

Reposen habitualment sobre la normalitat dels factors de risc de forma local

- Delta VaR

$$dP = \left.\frac{\partial P}{\partial S}\right|_{S_0} dS$$

Per un portafoli donat P i un factor de risc S

Típicament, $$VaR = S_0 \cdot \delta \cdot \sigma \cdot \alpha$$

- Gamma – Delta VaR

Incloent termes de segon ordre: $$dP = \frac{\partial P}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} dS^2 + \ldots$$

obtenim: $$VaR = \sqrt{(S \cdot \delta \cdot \sigma \cdot \alpha)^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \left(S^2 \cdot \gamma \cdot \sigma^2\right)^2}$$

Metodologies *Value-at-Risk (II)*

VaR històric

Consisteix en aplicar la sèrie de rendiments històrics per cada actiu en consideració.

$$P_t = P\left[f_{1,t}, f_{2,t}, \ldots, f_{N,t}\right]$$

$$\Delta f_i^k = \left\{\Delta f_{i,1}, \Delta f_{i,2}, \ldots, \Delta f_{i,t}\right\}$$

$$f_i^k = f_{i,t} + \Delta f_i^k$$

On P és el portafoli, f_i el factor de risc i Δf_i^k la sèrie històrica de rendiments pel factor f_i.

Simulacions VaR – Monte Carlo

Els moviments en els factors de risc són generats a partir d'una distribució concertada

$$\Delta f^k \approx g(\theta) \quad k = 1, \ldots K$$

On g és la distribució i θ els paràmetres requerits en la distribució

Metodologies *Value-at-Risk (III)*

Simulacions VaR – Monte Carlo

En la pràctica, els portafolis financers que cal tractar estan constituïts per múltiples títols / actius el qual comporta considerar diferents fonts de risc.

Si els factors de risc no estan correlacionats, aleshores la simulació pot realitzar-se independentment per cada variable:

$$\Delta f_{j,t} = f_{j,t-1}\,(\mu_j \Delta t \;+\; \sigma_j \varepsilon_{j,t} \sqrt{\Delta t})$$

Tanmateix, les variables acostumen a exhibir una correlació.
El mètode utilitzat freqüentment consisteix amb la factorització de Cholesky:

$$V(\varepsilon) = T\,T^{'}$$

On V(ε) és la matriu de covariança de les variables ε i T és la matriu triangular amb zeros per sobre de la diagonal.

$$\varepsilon = T\,\eta \qquad\qquad V(\eta) = I$$

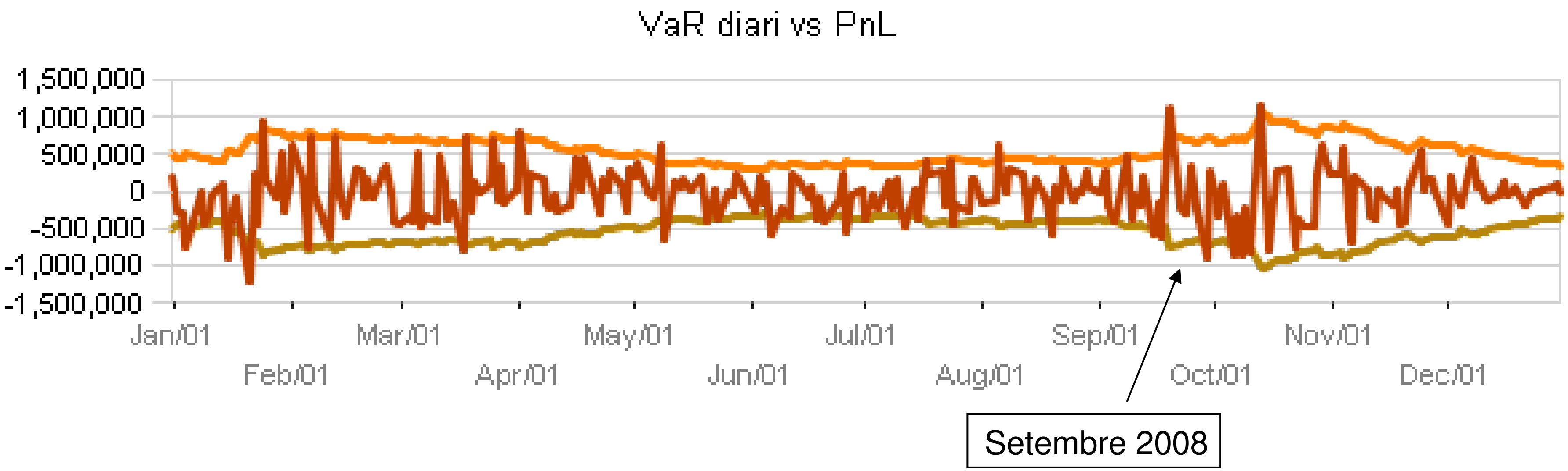
El risc del VaR

- Si per alguna raó o altre, l'estimació del VaR fos incorrecta podria induir a les empreses a assumir un risc superior al estimat pel VaR.
- Seria convenient estimar la fiabilitat de les mesures de VaR.

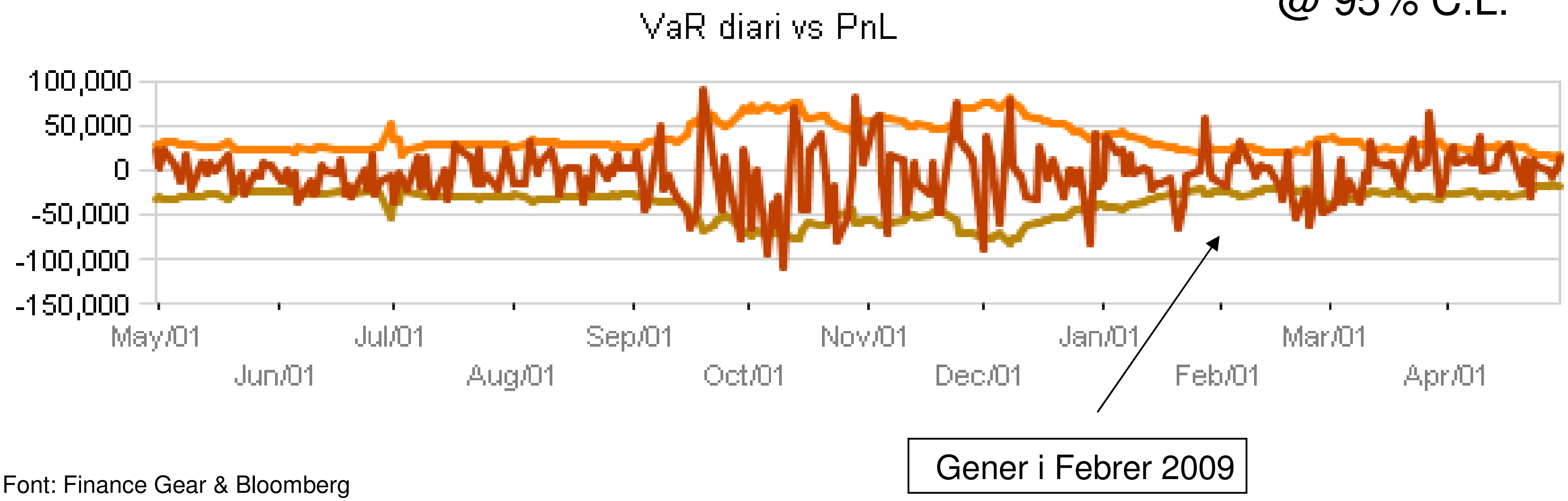
- El *BackTesting* proporciona un marc estadístic que permet verificar si les pèrdues observades estan d'acord, de forma raonable, amb les pèrdues projectades
- Addicionalment, els estudis es complementen amb *Stress Tests.* Capacitat d'absorbir les pèrdues generades en escenaris límits.
- Els *Stress Test* tenen la finalitat de il·lustrar els pitjors escenaris possibles. Els *Stress Test* són un complement al VaR.

BackTesting

@ 95% C.L.



@ 95% C.L.



Font: Finance Gear & Bloomberg

Determinació de la fiabilitat de les mesures de risc

- Sigui **x** el nivell de confiança.
- Sigui **q** la fracció d'observacions que excedeixen el valor de VaR.
- La variable **q** obeeix una distribució **binomial**.
- Per tant, és possible calcular la probabilitat d'observar **q** successos.
- Conseqüentment, podem realitzar un test per determinar si **q** és significativament diferent de **x**.

Test

- *Log Likelihood ratio* estadístic test:

$$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0 \qquad \mathrm{H}_\mathrm{A} : \theta = \theta_\mathrm{A} \qquad \Lambda = \frac{f(x;\theta_\mathrm{A})}{f(x;\theta_0)}$$

$$LR = -2\left[\ln\left(q^{nobs}(1-q)^{N-nobs}\right) - \ln\left(x^{nobs}(1-x)^{N-nobs}\right)\right]$$

- Aquesta variable (ratio) té una distribució (χ^2) asimptòticament amb un grau de llibertat.

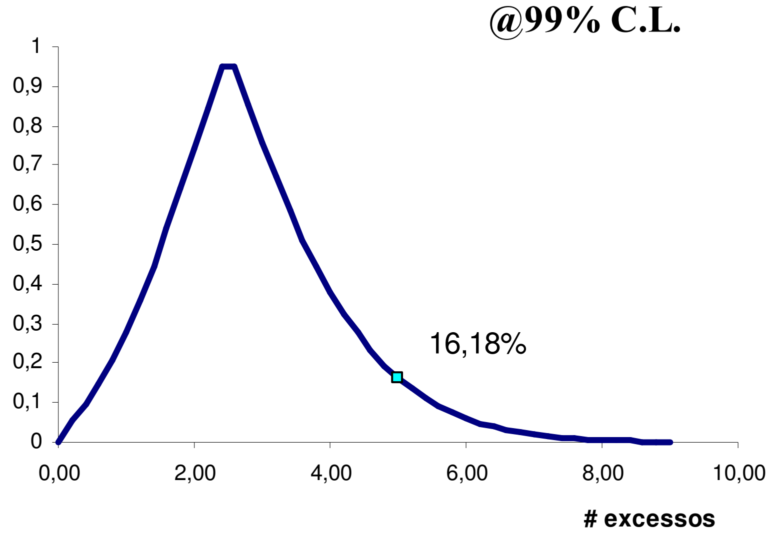
Exemple (I)

- Suposem un VaR de 1%.
- Sobre 250 dies, observem que 5 tenen un VaR més gran que 1%

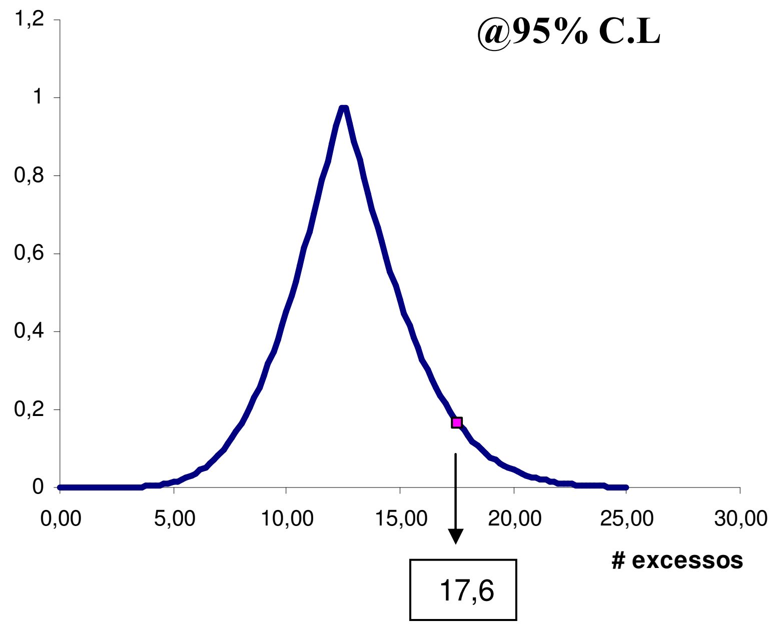
- $x = 0.01$; $q = 5/250 = 0.02$
- LR = 1.96
- Òbviament, no té la mateixa connotació si els 5 excessos s’observen consecutivament …

Exemple (II)

• La probabilitat d'observar 5 dies amb perdues superiors al seu valor de VaR al 99% de nivell de confiança és del 16,18%.



• En aquestes situacions es realitzen diferents test de Backtesting. Per exemple recalcular-ho al 95% de nivell de confiança.



• En termes generals, el regulador es mostrarà molt crític amb situacions que exhibeixin una probabilitat inferior al 5%.

Regulació (I)

- El regulador estableix que el VaR sigui calculat al 99% C.L.
- De forma general, el mínim període de tinença s'estableix en 10 dies.
- El període de càlcul del VaR diari s'estendrà sobre un període no inferior al any (252 sessions de mercat)
- Les entitats financeres calcularan els requeriments de capital diari degut al risc de mercat com el màxim entre:
  - El VaR del dia precedent
  - la mitja de les darreres 60 sessions

- Les autoritats reguladores estableixen un factor de multiplicació α, no sent mai inferior a 3.

$$Capital = \alpha \cdot Max\left[VaR_{d-1}; VaR_{\overline{60d}}\right] \cdot \sqrt{t} + \beta$$

on α és el factor multiplicador per corregir els efectes de leptocurtosis, el ***VaR*** diari és calculat al 99% de nivell de confiança, ***t*** és el període de tinença i β és un factor addicional destinar a corregir infravaloracions sistemàtiques del VaR.

Regulació (II)

Zona	Nombre d'excepcions	α	Acció del regulador
Verda	0	3	Model Intern acceptat
	1	3	
	2	3	
	3	3	
	4	3	
Groga	5	3,4	Model Intern sota revisió
	6	3,5	
	7	3,65	
	8	3,75	
	9	3,85	
Vermella	$\geq$ 10	4	Model rebutjat

- Les operacions intradia s'eliminen

- El regulador a de diferenciar entre la mala sort i el model defectuós o inacurat.

- Possibilitat d'optimitzar el consum de capital via el VaR mesurat i el VaR comunicat a les autoritats reguladores

- Les autoritats reguladores estan preocupades pels casos de poca probabilitat però amb grans pèrdues. Aquests casos no afecten el ***VaR***.

Fat Tails (I)

• Sigui X una variable aleatòria amb una distribució de Pareto, aleshores la probabilitat de que X sigui més gran que un nombre x ve donada per:

$$\Pr(X > x) = \left(\frac{x}{x_m}\right)^{-k}$$

Per tot $x>x_m$ on x_m és el valor mínim possible de *X*.

• Així, s'obté que la funció distribució cumulativa és: $F_X(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_m}\right)^{-k}$

i la funció densitat de probabilitat: $f(x;k;x_m) = k\frac{x_m^k}{x^{k+1}} \qquad x \geq x_m$

amb valor esperat: $E(x) = \frac{k}{k-1}x_m$

• Es ben conegut que les distribucions dels rendiments financers mostren cues en les seves distribucions molt més poblades del que s'esperaria per les distribucions normals.

• La dificultat de descriure els pitjors escenaris possibles, fa que cada cop s'utilitzi més l'estudi d'aquestes distribucions, a fi i efecte, de completar els resultats de VaR.

Fat Tails (II)

- La distribució generalitzada de Pareto : $F(\xi,\mu,\sigma) = 1 - \left(1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-1/\xi}$

- D'acord amb la distribució de Pareto, observem que:

$$CVaR = E\left[X \middle| X > VaR\right] = \frac{k}{k-1} VaR$$

- Experimentalment, els valors de k mostren un rang entre 1,5 i 5,5 típicament.

- Per k = 1,5 s'obté que el VaR es multipliqui per un coeficient α igual a 3.
  Aquest ha estat l'elecció del regulador.

VaR i Liquiditat (I)

- Les estimacions de VaR utilitzen freqüentment els rendiments que corresponen al preu mig entre oferta i demanda.

- Aquest valor mig normalment no correspon al valor de liquidació. El valor de liquidació serà inferior si hi ha un *spread* important.

- La correlació negativa entre el spread i els rendiments comporta que aleshores el VaR esdevé infravalorat.

- L'estimació de Var assumeix que tots els actius financers poden ser liquidats.

- Si es dona el cas que l'inversor liquida tots els seus actius quan el mercat cau per sota d'un cert nivell; hi ha el perill que l'inversor es quedi només amb tots els actius que són il·líquids i que probablement representin pèrdues més grans a les esperades.

VaR i Liquiditat (II)

- Principalment, després de la crisi del LTCM, s'ha realitzat que el VaR hauria d'incorporar una prima pels risc de liquiditat, que pot arribar al 25% i 30% en mercats emergents.

- Hi ha mesures que incorporen al càlcul del VaR la meitat del *spread* (diferencial entre el preu de la part compradora i la part venedora). El seu impacte en el VaR diari pot oscil·lar entre el 10% i el 40%.

- Altres aproximacions estableixen unes ponderacions λ a partir de la freqüència de negociació i del volum del títols invertits respecte el volum de títols negociats diàriament.